

11 класс

1. Мощность в пространстве

На изначально покоящийся на гладком горизонтальном столе брусок массы $m = 2$ кг, начали действовать постоянной горизонтальной силой F . В результате была получена зависимость мощности N от перемещения s бруска. Некоторые измерения могли оказаться не очень точными.

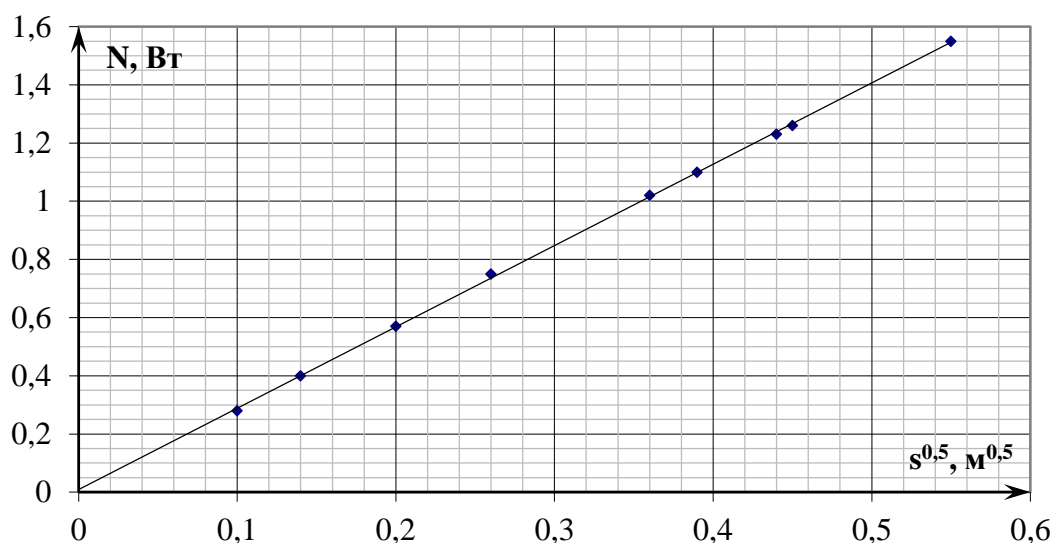
- В каких координатных осях экспериментальная зависимость мощности от перемещения линейна?
- Определите мощность силы в точке с координатой $s_0 = 10$ см.
- Найдите значение силы F .

N , Вт	0,28	0,40	0,57	0,75	1,02	1,10	1,23	1,26	1,50
s , см	1,0	2,0	4,0	7,0	13	15	19	20	30

Возможное решение

Гордеев З.

Так как $N = Fv$ и работа силы $A = Fs = \frac{mv^2}{2}$, то $N = \sqrt{\frac{2F^3 s}{m}}$ и ожидается линейная зависимость $N(\sqrt{s})$. Линейная зависимость будет и в логарифмических координатах.



Построим график $N(\sqrt{s})$ по табличным данным. Проведем через нанесённые точки наилучшую прямую из начала координат.

В точке с координатой $s = 10$ см мощность должна составлять 0,89 Вт. По угловому коэффициенту наклона графика $k = \frac{\Delta N}{\sqrt{\Delta s}} = \sqrt{\frac{2F^3}{m}} \approx 2,8$ Вт/м^{1/2} определяем значение силы

$$F = \sqrt[3]{k^2 m / 2} \approx 2,0 \text{ Н.}$$

Сегодня, 20 января, на портале online.mipt.ru составители данного комплекта проведут онлайн-разбор решений задач. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 16.00; 8 класс – 17.00; 9 класс – 18.30; 10 класс – 20.00; 11 класс – 19.00. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале online.mipt.ru

Критерии оценивания

- Вывод теоретической зависимости $N(s)$ **2 балла**
- Выбор осей $N(\sqrt{s})$ или $N^2(s)$, в которых зависимость линейна **1 балл**
- Построение графика в осях $N(\sqrt{s})$ **3 балла**
 - Если построен криволинейный график **1 балл**
- Нахождение мощности в точке $s = 10$ см **1 балл**
 - интерполяция на криволинейном графике **0 баллов**
- Нахождение углового коэффициента графика **1 балл**
- Нахождение значения силы **2 балла**

Сегодня, 20 января, на портале **online.mipt.ru** составители данного комплекта проведут онлайн-разбор решений задач. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 16.00; 8 класс – 17.00; 9 класс – 18.30; 10 класс – 20.00; 11 класс – 19.00. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале **online.mipt.ru**

2. «Тёмная материя»

Скопления звёзд образуют бесстолкновительные системы – галактики, в которых звёзды равномерно движутся по круговым орбитам вокруг оси симметрии системы. Галактика NGC 2885 состоит из скопления звёзд в виде шара (ядра радиусом $r_{\text{я}} = 4$ кпк) и тонкого кольца,



внутренний радиус которого совпадает с радиусом ядра, а внешний равен $15 r_{\text{я}}$. Кольцо состоит из звёзд с пренебрежимо малой по сравнению с ядром массой. В ядре звёзды распределены равномерно.

Было установлено, что линейная скорость движения звёзд в кольце не зависит от расстояния до центра галактики: от внешнего края кольца вплоть до края ядра скорость звёзд $v_0 = 240$ км/с. Такое явление может быть объяснено наличием несветящейся массы («тёмной материи»), распределенной сферически симметрично относительно центра галактики вне её ядра.

- 1) Определите массу $M_{\text{я}}$ ядра галактики.
- 2) Определите среднюю плотность $\rho_{\text{я}}$ вещества ядра галактики.
- 3) Найдите зависимость плотности «тёмной материи» $\rho_{\text{T}}(r)$ от расстояния до центра галактики.
- 4) Вычислите отношение массы «тёмной материи», влияющей на движение звёзд в диске, к массе ядра.

Примечание: 1 кпк = 1 килопарсек = $3,086 \cdot 10^{19}$ м, гравитационная постоянная $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2}$.

Сегодня, 20 января, на портале **online.mipt.ru** составители данного комплекта проведут онлайн-разбор решений задач. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 16.00; 8 класс – 17.00; 9 класс – 18.30; 10 класс – 20.00; 11 класс – 19.00. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале **online.mipt.ru**

Возможное решение

Коротков П.

Из уравнения $\frac{v_0^2}{r_я} = \frac{\gamma M_я}{r_я^2}$ находим массу ядра галактики: $M_я = \frac{r_я v_0^2}{\gamma} = 1,1 \cdot 10^{41}$ кг.

Средняя плотность материи в ядре галактики $\rho_я = \frac{M_я}{(4/3)\pi r_я^3} = \frac{3v_0^2}{4\pi\gamma r_я^2} = 1,35 \cdot 10^{-20}$ кг/м³.

Вне ядра галактики $\frac{v_0^2}{r} = \left(\frac{\gamma}{r^2}\right)(M_я + M_T(r))$. Тогда $v_0^2 r = \gamma(M_я + M_T(r))$.

После дифференцирования этого выражения получим: $v_0^2 dr = \gamma dM_T(r) = \gamma \rho(r) 4\pi r^2 dr$.

Из последнего уравнения найдём зависимость плотности «тёмной материи» $\rho_T(r)$ от

расстояния до центра галактики: $\rho(r) = \frac{v_0^2}{4\pi\gamma r^2} = \frac{M_я}{4\pi r_я r^2}$.

Масса тёмной материи $M_T = \frac{15r_я v_0^2}{\gamma} - M_я = 14M_я$. Этот же результат можно получить и

интегрированием: $M_T = \int_{r_я}^{15r_я} \rho(r) 4\pi r^2 dr = 14M_я$.

Таким образом, искомое отношение равно 14.

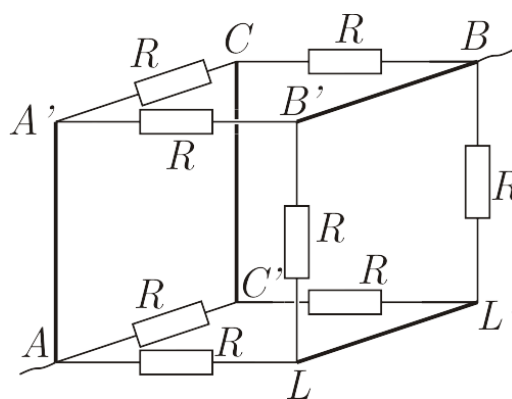
Критерии оценивания

- | | |
|---|----------------|
| 5) Определена масса $M_я$ ядра галактики | 2 балла |
| 6) Определена средняя плотность $\rho_я$ вещества ядра галактики | 1 балл |
| 7) Найдена зависимость плотности «тёмной материи» $\rho_T(r)$ от расстояния до центра галактики | 4 балла |
| 8) Вычислено отношение массы «тёмной материи», влияющей на движение звёзд в диске, к массе ядра | 3 балла |

Сегодня, 20 января, на портале **online.mipt.ru** составители данного комплекта проведут онлайн-разбор решений задач. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 16.00; 8 класс – 17.00; 9 класс – 18.30; 10 класс – 20.00; 11 класс – 19.00. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале **online.mipt.ru**

3. Четыре в кубе

Куб собран из одинаковых резисторов, имеющих сопротивления R . Четыре резистора заменены на идеальные перемычки, как указано на рисунке.



- Найдите общее сопротивление получившейся системы между контактами А и В.
- Через какие резисторы сила текущего тока максимальна, а через какие – минимальна? Найдите эти значения силы тока, если сила тока, входящего в узел А равна $I_0 = 1,2$ А?
- Какова сила тока, текущего через идеальную перемычку АА'?

Возможное решение

Изобразим эквивалентную схему и расставим токи в ветвях с учетом закона сохранения заряда и симметрии соединения резисторов.

Силу тока I_1 найдем, приравняв разность потенциалов между узлами А и L для ветвей AL и ACL:

$$I_1 R = IR + (2I - I_1)R, \text{ откуда } I_1 = 3I/2.$$

Аналогичным образом найдём силу тока I_2 :

$$U_0 = I_2 R = I_1 R + IR = 5IR/2, \text{ откуда } I_2 = 5I/2.$$

Сила тока $I_0 = 2I + I_1 + I_2 = 5I/2 = 6I$. Отсюда $I = 0,2$ А.

Теперь легко дать ответы на вопросы задачи.

$$\text{Общее сопротивление цепи равно } R_0 = \frac{U_0}{I_0} = \frac{5IR}{2} \frac{1}{6I} = \frac{5}{12} R.$$

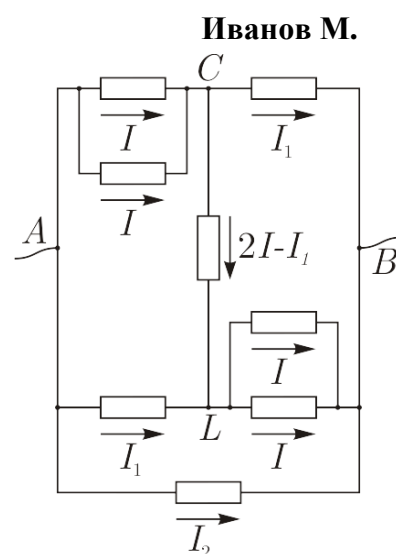
Минимальная сила тока в ветви CL. Она равна $2I - I_1 = I/2 = 0,1$ А. Максимальная сила тока в ветви А'В': $I_2 = 0,5$ А.

Сила тока, текущего через идеальную перемычку АА', равна сумме токов через резисторы в ветвях А'С и А'В':

$$7I/2 = 0,7 \text{ А.}$$

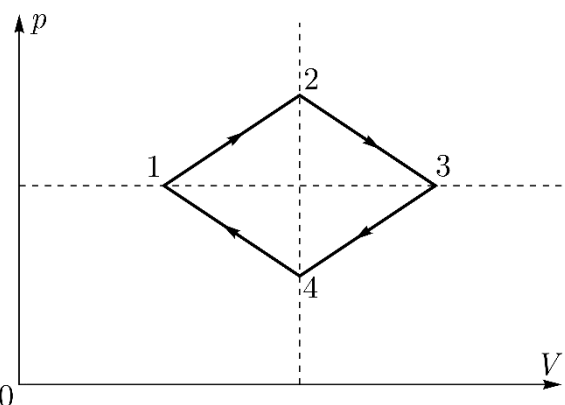
Критерии оценивания

- | | |
|--|----------------|
| • Правильная эквивалентная схема | 2 балла |
| • Найдены токи через резисторы | 3 балла |
| • Найдено общее сопротивление | 2 балла |
| • Определены максимальные и минимальные токи | 2 балла |
| • Найден ток через перемычку | 1 балл |



Сегодня, 20 января, на портале online.mipt.ru составители данного комплекта проведут онлайн-разбор решений задач. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 16.00; 8 класс – 17.00; 9 класс – 18.30; 10 класс – 20.00; 11 класс – 19.00. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале online.mipt.ru

4. Ромб. Циклический процесс, совершаемый над идеальным газом, на (p, V) плоскости представляет собой ромб (см. качественный рисунок). Вершины (1) и (3) лежат на одной изобаре, а вершины (2) и (4) – на одной изохоре. За цикл газ совершил работу A .



Насколько отличается количество теплоты Q_{12} , подведённой к газу на участке 1-2, от количества теплоты $|Q_{3,4}|$, отведённой от газа на участке 3-4?

Возможное решение.

Слободянин В.

Количество теплоты, подведённое к газу на участке 1-2 равно $Q_{1,2} = U_{1,2} + A_{1,2}$.

Количество теплоты, отведённое от газа на участке 3-4 равно $|Q_{3,4}| = U_{4,3} + A_{4,3}$.

Сравним изменения величин внутренних энергий.

Пусть давление в точках 1 и 3 равно p_0 , а объём в точках 2 и 4 равен V_0 . Пусть далее, при переходе из состояния 1 в 2 давление изменяется на Δp , а объём на ΔV . Тогда изменение температуры найдём из следующих соображений:

$$\begin{aligned} \nu RT_2 &= p_0 V_0 + V_0 \Delta p; \\ \nu RT_1 &= p_0 V_0 - p_0 \Delta V; \\ \nu R(T_2 - T_1) &= V_0 \Delta p + p_0 \Delta V. \end{aligned}$$

При переходе из состояния 3 в состояние 4 изменение температуры найдём из следующих соображений:

$$\begin{aligned} \nu RT_3 &= p_0 V_0 + p_0 \Delta V; \\ \nu RT_4 &= p_0 V_0 - V_0 \Delta p; \\ \nu R(T_3 - T_4) &= p_0 \Delta V + V_0 \Delta p. \end{aligned}$$

Поскольку $T_3 - T_4$ равно $T_2 - T_1$, то равны между собой и изменения величин внутренней энергии: $U_{1,2} = U_{4,3}$.

Работа $A_{1,2}$ больше работы $A_{4,3}$ на величину $A/2$.

Следовательно, и количество теплоты, подведённой к газу на участке 1-2, больше количества теплоты, отведённой от газа на участке 3-4, на $A/2$.

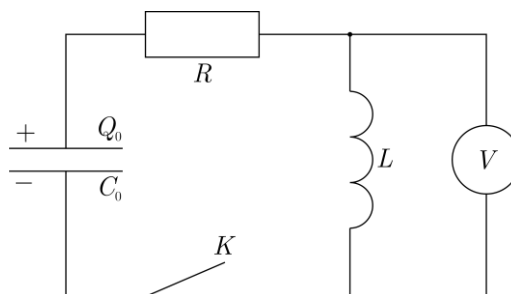
Сегодня, 20 января, на портале **online.mipt.ru** составители данного комплекта проведут онлайн-разбор решений задач. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 16.00; 8 класс – 17.00; 9 класс – 18.30; 10 класс – 20.00; 11 класс – 19.00. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале **online.mipt.ru**

Критерии оценивания

1. Использовано 1-е начало термодинамики для участков 1-2 и 3-4 цикла **1 балл**
2. Показано, что изменения температуры на участках 1-2 и 3-4 одинаковы (по модулю) **4 балла**
3. Сделан вывод о том, что изменения внутренней энергии на участках 1-2 и 3-4 равны (по модулю) **1 балл**
4. Показано, что модули работы на участках 1-2 и 3-4 отличаются на $A/2$ **3 балла**
5. Записан окончательный результат **1 балл**

5. Колебаниям – нет!

В электрической цепи (см. рис.), состоящей из резистора сопротивлением R , катушки индуктивностью L , на конденсаторе емкостью C_0 находится заряд Q_0 . В некоторый момент времени замыкают ключ K и одновременно начинают изменять емкость конденсатора так, что идеальный вольтметр показывает постоянное напряжение.



- 1) Как зависит от времени емкость конденсатора $C(t)$ при изменении t от 0 до $t_1 = \sqrt{C_0 L}$?
- 2) Какую работу за время t_1 совершили внешние силы? Считайте, что $t_1 = L/R = \sqrt{C_0 L}$.

Подсказка. Количество теплоты, выделившейся на резисторе за время t_1 ,

$$\text{равно } W_R = \int_0^{t_1} I^2(t) R dt = \frac{Q_0^2}{3C_0}.$$

Возможное решение.

Осин М.

В начальный момент времени ток в цепи не течёт, поэтому $U_L = U_C = \frac{Q_0}{C_0}$.

Поскольку $U_L = L \frac{dI}{dt}$ и остается постоянным (по условию), то: $I = \frac{Q_0}{C_0 L} t$.

По закону Ома для полной цепи

$$U_C = U_L + RI(t) = L \frac{dI}{dt} + RI(t) = \frac{Q_0}{C_0} + \frac{Q_0 R}{C_0 L} t = \frac{Q_0}{C_0} \left(1 + \frac{R}{L} t \right).$$

Заряд на конденсаторе изменяется по закону

$$Q(t) = Q_0 - \frac{Q_0}{C_0 L} \int_0^t \tau d\tau = Q_0 \left(1 - \frac{t^2}{2C_0 L} \right).$$

Этот же результат можно получить, вычислив площадь под графиком зависимости $I(t)$.

$$\text{Окончательно, } C(t) = \frac{Q(t)}{U(t)} = C_0 \left(1 - \frac{t^2}{2C_0 L} \right) / \left(1 + \frac{Rt}{L} \right).$$

Сегодня, 20 января, на портале **online.mipt.ru** составители данного комплекта проведут онлайн-разбор решений задач. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 16.00; 8 класс – 17.00; 9 класс – 18.30; 10 класс – 20.00; 11 класс – 19.00. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале **online.mipt.ru**

Искомую работу найдем из закона сохранения энергии

$$A = W_R + \Delta W_C + \Delta W_L.$$

Энергия, запасенная в конденсаторе,

$$W_C = \frac{1}{2} Q U_C = \frac{Q_0^2}{2C_0} \left(1 - \frac{t^2}{2C_0 L} \right) \left(1 + \frac{R}{L} t \right).$$

Отсюда $W_C(0) = \frac{1}{2} Q U_C = \frac{Q_0^2}{2C_0}$, $W_C(t_1) = \frac{1}{2} Q U_C = \frac{Q_0^2}{2C_0} \left(1 - \frac{1}{2} \right) (1+1) = \frac{Q_0^2}{2C_0}$.

Окончательно

$$A = \frac{Q_0^2}{3C_0} + 0 + \frac{Q_0^2}{2C_0} = \frac{5Q_0^2}{6C_0}.$$

Примечание. Условие, что напряжение на индуктивности остается постоянным, может выполняться только конечное время, поэтому в вопросе (1) стоит ограничение $t < t_1 = \sqrt{C_0 L}$.

Критерии оценивания

- | | |
|---|---------|
| 1. Получена зависимость $I(t)$ | 1 балл |
| 2. Получена зависимость $U(t)$ | 2 балла |
| 3. Получена зависимость $Q(t)$ | 2 балла |
| 4. Найдена зависимость $C(t)$ | 1 балл |
| 5. Записан закон сохранения энергии | 1 балл |
| 6. Показано, что энергия конденсатора не изменилась | 2 балла |
| 7. Вычислена работа внешних сил | 1 балл |

Сегодня, 20 января, на портале **online.mipt.ru** составители данного комплекта проведут онлайн-разбор решений задач. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 16.00; 8 класс – 17.00; 9 класс – 18.30; 10 класс – 20.00; 11 класс – 19.00. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале **online.mipt.ru**