45th International Physics Olympiad
Astana, Kazakhstan
Theoretical Competition, Tuesday, 15 July 2014

Списокфундаментальныхконстант

Скорость света в вакууме	$c = 299792458\,\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$
Гравитационная постоянная	$G = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\text{м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
Ускорение свободного падения	$g = 9.81\,\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$
Число Авогадро	$N_A = 6.02 \cdot 10^{23}\,\text{моль}^{-1}$
Универсальная газовая постоянная	$R = 8.31\,J \cdot K^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$
Постоянная Больцмана	$k = 1.38 \cdot 10^{-23}\,\text{Дж} \cdot K^{-1}$
Элементарный заряд	$e = 1.60 \cdot 10^{-19}\,\text{Кл}$
Масса электрона	$m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\,\text{кг}$
Масса протона	$m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}\,kg$
Постоянная Планка	$\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34}\,\text{Дж} \cdot \text{с}$
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\,\text{Ф} \cdot \text{м}^{-1}$
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6}\,\text{Гн} \cdot \text{м}^{-1}$

Полезные математические формулы

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)x^2, \text{где} |x| \ll 1 \text{и} \alpha \text{постоянная}$$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3}, \text{где} |x| \ll 1$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2, \text{где} |x| \ll 1$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1, \text{где} C \text{постоянная интегрирования}$$

$$\int \frac{dx}{x-a} = \log|x-a| + C,\ \text{где} C \text{постоянная интегрирования}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$u_t'(x(t)) = u_x'(x(t))x_t'(t)$$

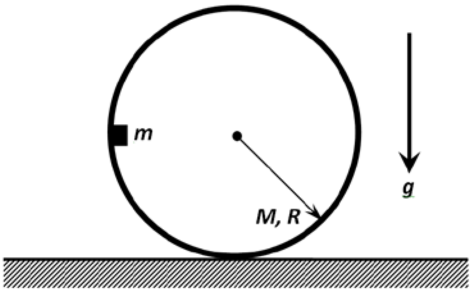
$$\big(u(x)v(x)\big)' = u(x)'v(x) + u(x)v(x)'$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u(x)'v(x) - u(x)v(x)'}{v(x)^2}$$

Задача 1 (9 баллов)

Эта задача состоит из трёх независимых частей

Часть A (3 балла)



Небольшое тело массой m осторожно положили на внутреннюю поверхность полого тонкого цилиндра массой M и радиуса R. В начальный момент времени цилиндр покоится на горизонтальной поверхности стола, а тело находится на высоте R над поверхностью стола. Найдите силу F взаимодействия между телом и цилиндром в тот момент, когда тело находится в низшей точке своей траектории. Трение между телом и внутренней поверхностью цилиндра отсутствует, а цилиндр сам движется по поверхности стола без проскальзывания. Ускорение свободного падения равно g.

Часть B (3 балла)

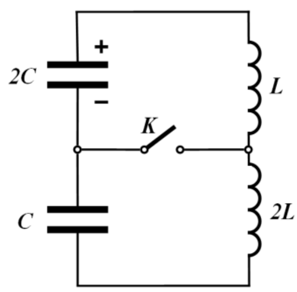
В вакууме находится мыльный пузырь радиуса $r = 5.00$ см и толщиной стенок $h = 10.0$ мкм, внутри которого содержится двухатомный идеальный газ. Коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки $\sigma = 4.00 \cdot 10^{-2}\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ и плотность $\rho = 1.10\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

1) Выведите формулу и рассчитайте молярную теплоемкость C газа в мыльном пузыре. Считайте, что газ нагревается так медленно, что пузырь всё время находится в состоянии механического равновесия;

2) Найдите и рассчитайте циклическую частоту ω радиальных колебаний пузыря. Считайте, что теплоемкость мыльной пленки много больше теплоемкости газа в пузыре и термодинамическое равновесие внутри пузыря устанавливается гораздо быстрее, чем период колебаний.

Подсказка: Лаплас показал, что разница давлений внутри и снаружи искривленной поверхности между жидкостью и газом, вызванная поверхностным натяжением, равна $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$.

Часть C (3 балла)



В начальный момент в схеме, изображенной на рисунке, ключ K разомкнут, конденсатор емкостью $2C$ имеет заряд q_0, конденсатор емкостью C не заряжен, ток в катушках с индуктивностями L и $2L$ отсутствует.

Конденсатор начинает разряжаться, и в момент времени, когда сила тока в катушках достигает максимального значения, ключ K замыкают. Найдите максимальную силу тока I_{max}, протекающего в последующем через ключ K.

Задача 2. Уравнение состояния Ван-дер-Ваальса (11 баллов)

В модели идеального газа, описываемого уравнением Менделеева—Клапейрона, не учитываются два важных физических эффекта. Во-первых, молекулы реального газа имеют конечный размер, во-вторых — они взаимодействуют друг с другом. Во всех частях задачи рассматривается *один моль водяного пара.*

Часть A. Уравнение состояния неидеального газа (2 балла)

С учетом конечного размера молекул уравнение состояния газа примет вид

$$P(V-b)=RT, \tag{1}$$

где P, V, T — давление газа, его объем и температура, соответственно, R — универсальная газовая постоянная, а b — некоторая постоянная.

A1	Оцените параметр b и выразите его через характерный диаметр молекулы воды d. **(0,3 балла)**

С учетом сил межмолекулярного притяжения Ван-дер-Ваальс предложил следующее уравнение, которое описывает жидкое и газообразное состояние вещества:

$$\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT, \tag{2}$$

где a – ещё одна постоянная.

При температурах T ниже некоторой критической температуры T_c изотерма уравнения (2) представляет собой немонотонную кривую 1, изображенную на рис. 1, которая называется изотермой Ван-дер-Ваальса. На этом же рисунке построена кривая 2 — изотерма идеального газа при той же температуре. Реальная изотерма отличается от изотермы Ван-дер-Ваальса прямым участком $\boldsymbol{AB}$ с постоянным давлением P_{LG}, расположенным по оси объемов между V_L и V_G, на котором реализуется равновесие жидкости (обозначенной индексом L) и газа (обозначенного индексом G). Использовав второе начало термодинамики Дж. Максвелл показал, что давление P_{LG} должно быть выбрано таким образом, чтобы показанные на рисунке 1 площади I и II были одинаковы.

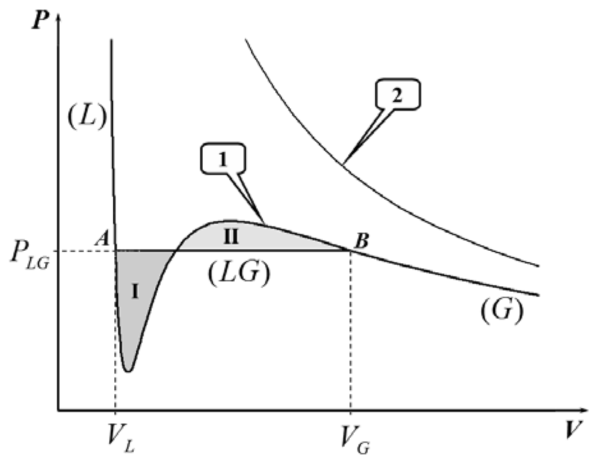


Рис. 1. Изотерма Ван-дер-Ваальса для газа/жидкости. (кривая 1) и изотерма идеального газа (кривая 2).

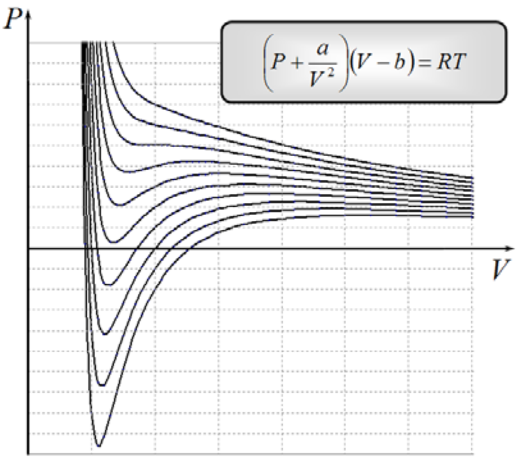


Рис. 2. Ряд изотерм Ван-дер-Ваальса.

С увеличением температуры длина прямолинейного участка AB изотермы уменьшается и при некоторой температуре T_c и давлении $P_{LG}=P_c$ обращается в нуль. Параметры P_c и T_c называются критическими и могут быть измерены экспериментально с большой точностью.

A2	Выразите постоянные Ван-дер-Ваальса a и b через T_c и P_c. **(1.3 балла)**
A3	Для воды $T_c=647$ К и $P_c=2.2\cdot 10^7$ Па. Вычислите a_w и b_w для воды. **(0.2 балла)**
A4	Оцените диаметр молекулы воды d_w. **(0.2 балла)**

Часть В. Свойства газа и жидкости (6 баллов)

В данной части задачи рассматриваются свойства воды в газообразном и жидком состояниях, находящейся при $t = 100$ °С. Давление насыщенного пара при этой температуре равно $P_{LG} = p_0 = 1.0 \cdot 10^5$ Па. Молярная масса воды $\mu = 1.8 \cdot 10^{-2}$ кг/моль..

Газообразное состояние

Можно считать, что при описании свойств воды в газообразном состоянии выполняется условие $V_G \gg b$.

B1	Получите формулу для объема пара V_G при заданных условиях и выразите его через R, T, P_0 и a. **(0.8 балла)**

Этот же объем V_{G0}. можно приближенно рассчитать с помощью уравнения состояния идеального газа.

B2	Рассчитайте, на сколько процентов уменьшается объем газа вследствие межмолекулярных взаимодействий: $\frac{\Delta V_G}{V_{G0}} = \frac{V_{G0}-V_G}{V_{G0}}$. **(0.3 балла)**

При уменьшении объема пара ниже значения V_G начинается его конденсация. Однако тщательно очищенный пар может оставаться в механически метастабильном состоянии (переохлажденный пар) до тех пор, пока его объем не достигнет некоторого значения $V_{G\min}$.

Условие механической стабильности переохлажденного газа при постоянной температуре записывается как $\frac{dP}{dV} < 0$.

B3	Найдите и рассчитайте, во сколько раз можно уменьшить объем пара, чтобы он оставался в газообразном состоянии. Другими словами, найдите $V_G/V_{G\min}$. **(0.7 балла)**

Жидкое состояние

Можно считать, что при ван-дер-ваальсосвском описании свойств воды в жидком состоянии выполняется неравенство: $P \ll a/V^2$.

B4	Выразите объем воды V_L в жидком состоянии через $a, b. R$ и T. **(1.0 балл)**

Полагая, что $bRT \ll a$, рассчитайте следующие характеристики воды (н*е удивляйтесь, если некоторые данные не совпадут с известными вам табличными значениями).*

B5	Выразите плотность воды ρ_L через μ, a, b, R и рассчитайте ее. **(0.3 балла)**
B6	Выразите объемный коэффициент теплового расширения $\alpha = \frac{1}{V_L}\frac{\Delta V_L}{\Delta T}$ через a, b, R и рассчитайте его. **(0.6 балла)**
B7	Выразите удельную теплоту парообразования воды L через μ, a, b, R и рассчитайте ее. **(1.1 балла)**
B8	Рассмотрите мономолекулярный слой воды и оцените коэффициент σ её поверхностного натяжения. **(1.2 балла)**

Часть C. Система жидкость-пар (3 балла)

Из правила Максвелла (равенства площадей) и уравнения Ван-дер-Ваальса при использованных в части **B** приближениях следует, что зависимость давления насыщенного пара p_{LG} от температуры T имеет вид

$$\ln p_{LG} = A + \frac{B}{T} \quad (3)$$

где A, B — постоянные величины, которые могут быть выражены через a, b следующим образом:

$$A = \ln\left(\frac{a}{b^2}\right) - 1\,;\; B = -\frac{a}{bR}$$

Уильям Томсон показал, что давление насыщенного водяного пара над поверхностью жидкости зависит от кривизны этой поверхности. Рассмотрим жидкость, которая не смачивает материал капилляра (угол смачивания равен 180°). При погружении капилляра в жидкость, она опускается на некоторую глубину вследствие поверхностного натяжения (см. рис. 3).

C1	Найдите малое изменение давления Δp_T насыщенных паров над искривленной поверхностью жидкости и выразите его через плотность пара ρ_s, плотность жидкости ρ_L, коэффициент поверхностного натяжения σ и радиус кривизны поверхности r. **(1.3 балла)**

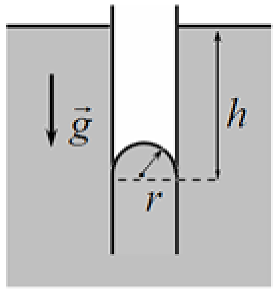


Рис. 3. Капилляр, погруженный в не смачивающую его жидкость, в атмосфере насыщенного пара.

Метастабильные состояния (рассмотренные в части **B3**) широко используются в реальных физических установках, таких, как камера Вильсона, пузырьковая камера для регистрации элементарных частиц, а также встречаются в природных явлениях, например, при образовании утренней росы. Переохлажденный пар стремится сконденсироваться, образуя капельки жидкости. Очень маленькие капли быстро испаряются, а достаточно большие могут расти.

C2	Предположим, что вечером при температуре $t_e = 20$ °C пар был насыщенным, а утром температура окружающей среды упала на небольшую величину $\Delta t = 5.0$ °C. Считая давление пара неизменным, оцените минимальный радиус капель, которые могут расти. Коэффициент поверхностного натяжения воды равен $\sigma = 7.3 \cdot 10^{-2}$ Н/м. **(1.7 балла)**

Задача 3. Простейшая модель газового разряда (10 баллов)

Процесс протекания электрического тока через газ называется газовым разрядом. Существует много типов газовых разрядов: тлеющий разряд (используется в осветительных лампах), дуговой разряд (применяется для сварки), искровой разряд (возникает между облаками и землей в виде молнии).

Часть А. Несамостоятельный газовый разряд (4.8 балла)

В этой части задачи будем изучать несамостоятельный газовый разряд, для поддержания которого необходимо постоянное присутствие внешнего ионизатора, т.е. устройства, которое в единице объема газа в единицу времени однородно по всему объему создаетZ_{ext} пар однократно ионизированных атомов и электронов.

При включении внешнего ионизатора число пар электронов и ионов начинает расти. Неограниченному увеличению концентрации электронов и ионов в газе препятствует процесс их рекомбинации, при котором свободный электрон соединяется с ионом и образуется нейтральный атом. Число рекомбинаций в единице объема в единицу времениZ_{rec} дается формулой

$$Z_{\text{rec}} = r n_e n_i,$$

гдеr— постоянная, называемая коэффициентом рекомбинации, аn_e иn_i— концентрации электронов и ионов соответственно.

Пусть в момент$t = 0$ включается внешний ионизатор. Начальная концентрация электронов и ионов в газе равна нулю. Тогда зависимость концентрации электронов$n_e(t)$ от времениtвыражается формулой

$$n_e(t) = n_0 + a \tanh bt,$$

гдеn_0, a, b— некоторые постоянные, а $\tanh x$—гиперболический тангенс.

A1	Найдите n_0, a, b и выразите ответ через Z_{ext} и r.**(1.8 балла)**

Предположим, что имеется два внешних ионизатора. Известно, что при включении одного из них в газе устанавливается концентрация электронов, равная$n_{e1} = 12 \cdot 10^{10}$ см$^{-3}$. При включении другого внешнего ионизатора в газе устанавливается концентрация электронов, равная$n_{e2} = 16 \cdot 10^{10}$см$^{-3}$.

A2	Найдите установившуюся концентрацию электронов n_e, если два ионизатора будут работать одновременно.**(0.6 балла)**

Внимание! *В дальнейшем считайте, что внешний ионизатор действует в течение достаточно длительного промежутка времени, так что все процессы являются стационарными и не зависят от времени. Собственным электрическим полем носителей заряда полностью пренебрегайте.*

Пусть газ находится в трубке между двумя параллельными проводящими пластинами площадиS, расположенными нарасстоянии$L \ll \sqrt{S}$ друг от друга. Приложим к пластинам напряжениеU,при этом между ними образуется электрическое поле. Считайте, что концентрация обоих носителей в трубке практически везде одинакова.

Пусть в электрическом поле электроны (обозначенные индексом e) и ионы (обозначенные индексом i) приобретают одинаковую скорость упорядоченного движения, равную

$$v = \beta E,$$

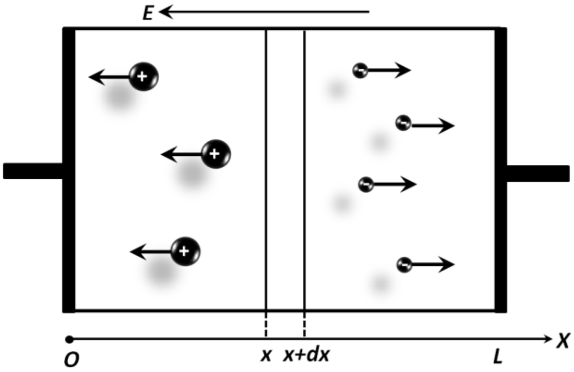
гдеE— напряженность электрического поля, аβ— так называемая подвижность.

A3	Выразитесилутока в трубкеI через$U, \beta, L, S, Z_{\text{ext}}, r, e$ гдеe— элементарный заряд.**(1.7 балла)**
A4	Найдите удельное сопротивление газа ρ_{gas} при малых значениях приложенного напряжения и выразите его через$\beta, L, Z_{\text{ext}}, r, e$.**(0.7 балла)**

Часть B. Самостоятельный газовый разряд (5.2 балла)

Изучим процесс зажигания самостоятельного газового разряда, при котором ток в трубке становится самоподдерживающимся.

Внимание! *В дальнейшем считайте, что внешний ионизатор продолжает действовать с тем же Z_{ext}, электрическое поле всюду однородно, а рекомбинацией можно полностью пренебречь. Собственным электрическим полем носителей заряда полностью пренебрегайте.*



Для самостоятельного газового разряда важны два процесса, не рассмотренных выше. Первый процесс — вторичная электронная эмиссия, а второй — образование электронной лавины. Вторичная электронная эмиссия возникает в тот момент, когда ионы ударяют по отрицательному электроду, называемому катодом, и выбивают из него электроны, которые затем движутся к положительному электроду, называемому анодом. Отношение числа выбитых в единицу времени электронов $\dot{N}_e$ к числу ионов $\dot{N}_i$, попадающих на катод в единицу времени, называется коэффициентом вторичной электронной эмиссии $\gamma = \dot{N}_e/\dot{N}_i$.

Образование электронной лавины происходит следующим образом. Электрическое поле ускоряет свободные электроны, которые ионизируют атомы при столкновении с ними. В результате число свободных электронов растет при их движении к аноду. Этот процесс характеризуется коэффициентом Таунсенда α, который описывает увеличение числа электронов dN_e на единицу длины пути dl, то есть

$$\frac{dN_e}{dl} = \alpha N_e.$$

Полный ток I в любом сечении трубки с газом складывается из ионного $I_i(x)$ и электронного токов $I_e(x)$, которые в стационарном режиме зависят от координаты x, показанной на рисунке. Изменение электронного тока $I_e(x)$ вдоль оси x описывается формулой

$$I_e(x) = C_1 e^{A_1 x} + A_2,$$

где A_1, A_2, C_1 — некоторые постоянные.

B1	Найдите A_1, A_2 и выразите их через $Z_{\text{ext}}, \alpha, e, L, S$. **(2 балла)**

Изменение ионного тока $I_i(x)$ вдоль оси x описывается формулой

$$I_i(x) = C_2 + B_1 e^{B_2 x},$$

где B_1, B_2, C_2 — некоторые постоянные.

B2	Найдите B_1, B_2 и выразите их через $Z_{\text{ext}}, \alpha, e, L, S, C_1$. **(0.6 балла)**
B3	Запишите условие для тока $I_i(x)$ в точке $x = L$. **(0.3 балла)**
B4	Запишите условие для токов $I_i(x)$ и $I_e(x)$ в точке $x = 0$. **(0.6 балла)**
B5	Найдите полный ток I и выразите его через $Z_{\text{ext}}, \alpha, \gamma, e, L, S$. Считайте, что полный ток остается конечной величиной **(1.2 балла)**

Пусть коэффициент Таунсенда α постоянен. При длине разрядного промежутка, большей некоторого критического значения $L > L_{\text{cr}}$, внешний ионизатор может быть отключен, т.е. разряд становится самостоятельным.

B6	Найдите L_{cr} и выразите его через $Z_{\text{ext}}, \alpha, \gamma, e, L, S$. **(0.5 балла)**