Всероссийская олимпиада школьников по физике

11 класс. Решение

Казань, 2017

Задача 1. Слинки Пружину «слинки» удерживают за верхний виток так, что ее нижний виток находится на высоте $h = 1$ м над уровнем пола, а длина самой пружины, растянутой силой собственного веса, равна $l = 1.5$ м. Пружину отпускают. Через какое время τ она упадет на пол? В нерастянутом состоянии витки пружины плотно прилегают друг к другу, не оказывая при этом давления друг на друга, а длина пружины составляет $l_0 = 6$ см. Витки тонкие. При схлопывании пружины витки между собой соударяются неупруго, и к моменту падения она успевает схлопнуться. Ответ дать с точностью 0.02 с.

Возможное решение По теореме о движении центра масс время падения пружинки - это время падения тела с высоты $H = h + h_c$, где h_c - высота центра масс относительно положения нижнего витка висящей пружины. Найдем эту высоту. Пусть жесткость одного витка пружины k, его масса m, число витков в пружине N. Тогда из условия равновесия для i-ого витка получаем:

$$k\Delta x_i = (i-1)mg \tag{1}$$

Координата i-ого витка равна

$$x_i = \sum_1^i \Delta x_i = \frac{mgi(i-1)}{2k} \tag{2}$$

Тогда, с учетом того, что число витков $N \gg 1$, получаем:

$$l = x_N = \frac{mgN(N-1)}{2k} \approx \frac{mgN^2}{2k} \tag{3}$$

Вычислим координату центра масс:

$$h_c = \frac{1}{mN}\sum_1^N mx_i = \frac{1}{N}\sum_1^N \frac{mgi(i-1)}{2k} = \frac{1}{N}\Big(\frac{mgN^3}{6k} + O(N^2)\Big) \approx \frac{mgN^2}{6k} = \frac{l}{3} \tag{4}$$

Время падения пружины

$$\tau = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2\big(h+\frac{l}{3}\big)}{g}} \approx 0.55\,\text{с} \tag{5}$$

Если учесть длину пружины в сжатом состоянии, то поправка на положение центра масс не превысит l_0, а поправка на время падения, соответственно, составит

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} \approx \frac{1}{2}\frac{\Delta H}{H} \approx \frac{l_0}{2\big(h+\frac{l}{3}\big)} \approx 2\% \Rightarrow \Delta\tau = 0.01\,\text{с} \tag{6}$$

Задача 2. Я тучка, тучка, тучка... В приближении адиабатической атмосферы оцените:

1. высоту H атмосферы Земли

2. высоту h_0 нижней кромки облаков

Таблица 1. Зависимость давления насыщенного водяного пара от температуры

$t,{}^0$C	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
P_H, мм.рт.ст.	7.01	8.05	9.21	10.5	12.0	13.6	15.5	17.5	19.8	22.4	25.2	28.4	31.8

Температура на поверхности Земли $t_0 = 27\,{}^0$C, а относительная влажность воздуха $\varphi = 80\%$. Считайте, что $h_0 \ll H$

Указание: Адиабатической называется атмосфера, в которой порции газа, перемещаясь по вертикали без теплообмена, все время остаются в механическом равновесии.

Примечание: Воздух считать идеальным двухатомным газом с молярной массой $\mu =$ 29 г/моль

Возможное решение Рассмотрим перемещение порции одного моля воздуха в атмосфере. В адиабатическом приближении по закону сохранения энергии работа внешнего по отношению к выделенной порции воздуха давления расходуется на изменение внутренней U и потенциальной $\mu g z$. Тогда:

$$P_1V_1 - P_2V_2 = U_2 - U_1 + \mu g(z_2 - z_1) \tag{1}$$

Перегруппировав слагаемые, получаем:

$$c_p \Delta T = -\mu g \Delta z \tag{2}$$

Отсюда получаем зависимость температуры от высоты

$$T = T_0 - \frac{\mu g}{c_p} z = T_0 - \frac{2\mu g}{7R} z \tag{3}$$

Высоту атмосферы можно оценить по высоте, при которой температура воздуха обращается в абсолютный ноль:

$$H \approx \frac{7RT_0}{2\mu g} \approx 30 \text{ км} \tag{4}$$

Нижняя кромка облаков образуется в точке росы, то есть на такой высоте h_0, при которой парциальное давление водяного пара сравнивается с давлением насыщенного пара $P(z)$, учитывая, что на поверхности Земли давление пара $P_0 = \varphi P_H(T_0)$.

По законам гидростатики парциальное давление водяного пара с высотой изменяется по закону:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \tag{5}$$

Так как $h_0 \ll H$, то можно считать изменения температуры и давления воздуха малыми, поэтому его плотность практически постоянна и равна $\rho \approx P_0 \mu_{H_2O}/RT_0$. Тогда давление изменяется по линейному закону:

$$\frac{P(z)}{P_H(T_0)} \approx \frac{P_0}{P_H(T_0)} - \frac{\rho g z}{P_H(T_0)} = \varphi\Big(1 - \frac{\mu_{H_2O} g z}{RT_0}\Big) \tag{6}$$

Используя таблицу зависимости давления насыщенного пара от температуры и зная зависимость температуры от высоты, построим график зависимости давления насыщенного пара от высоты $P_H(z)/P_H(T_0)$. На этой же координатной плоскости построим график зависимости парциального давления водяного пара $P(z)/P_H(T_0)$. Абсцисса точки пересечения этих графиков и будет искомой высотой.

Из графиков получаем, что $h_0 \approx 0.43$ км. Заметим, что на этой высоте парциальное давление паров понизилось примерно на 6% по сравнению с давлением у поверхности Земли, а температура - менее, чем на 2%, что вполне оправдывает наши приближения.

Альтернативное решение Выделим полубесконечный цилиндр воздуха сечением S. Рассмотрим небольшую порцию на высоте от z до $z + dz$. Запишем условие равновесия для этой порции:

$$P(z)S = P(z + dz)S + g\rho S dz \Rightarrow dP = -\rho g dz \tag{1}$$

Из уравнения Менделеева-Клапейрона, уравнения Пуассона в форме $\rho^{1-\gamma}T = const$ и с учетом (1) получаем:

$$\frac{7}{2}RdT = -\mu g dz \tag{2}$$

Проинтегрировав, получаем зависимость температуры воздуха от высоты:

$$T = T_0 - \frac{2\mu g}{7R}z \tag{3}$$

Дальнейшее решение полностью совпадает с основным

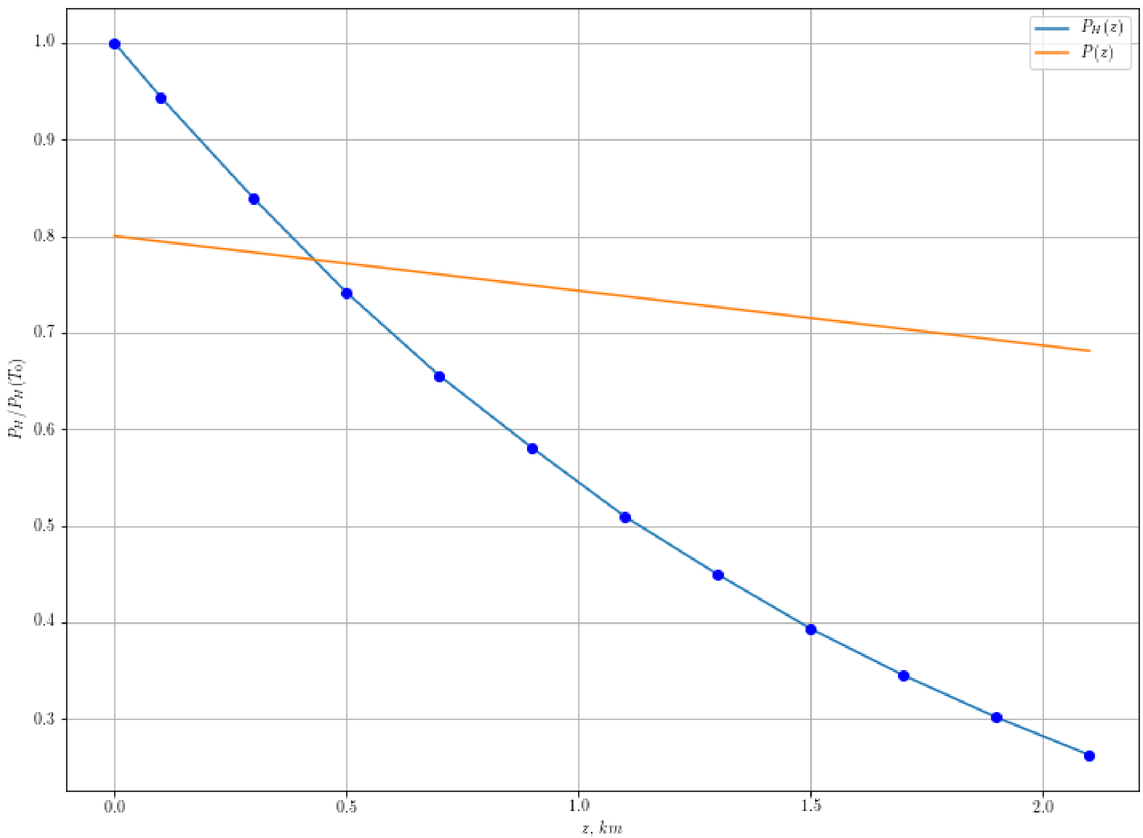

Рис. 1. Зависимость давления от высоты

Примечание: Можно находить зависимость давления от высоты так же через уравнение Пуассона, а затем делать оценку, приравнивая нулю давление на высоте H. Зависимость $P(z)$ при этом получается следующая:

$$P(z) = P(0)\Big(1 - \frac{2\mu g}{7RT_0}z\Big)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Задача 3. Бусинка Заряд Q равномерно распределен по поверхности диэлектрической тонкостенной закрепленной трубы радиуса R и длиной H. Бусинка с тем же по знаку зарядом может свободно скользить по тонкой непроводящей спице, совпадающей с диаметром серединного (равноудаленного от торцов) сечения.

Найдите период T малых колебаний бусинки относительно положения равновесия. Удельный заряд бусинки $\gamma = q/m$ считать известным.

Возможное решение Для определения зависимости $E_r(r)$ вблизи положения равновесия воспользуемся теоремой Гаусса: поток вектора $\vec{E}$ через поверхность соосного с заряженным небольшого цилиндра (радиус основания r, высота $2x$ ($x \ll r \ll R, H$) равен нулю. Для начала найдем $E_x(x)$. Это поле однородно заряженного кольца высотой $2x$, лежащего на дальнем от текущей точки крае цилиндра. Заряд кольца $2xQ/H$. Расстояние до точки наблюдения $L \approx \sqrt{R^2 + H^2/4}$. Тогда поле кольца на оси:

$$E_x(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{H} 2x \cdot \frac{1}{L^2} \cdot \frac{H}{2L} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{L^3} x.$$

Вычислим величины потоков: $\Phi_{\text{осн}}$ через основание и $\Phi_{\text{бок}}$ через боковую поверхность гауссова цилиндра:

$$\Phi_{\text{осн}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{L^3} x \cdot \pi r^2, \qquad \Phi_{\text{бок}} = 2\pi r \cdot 2x \cdot E_r(r).$$

По теореме Гаусса $2\Phi_{\text{осн}} + \Phi_{\text{бок}} = 0$, значит

$$2\pi r \cdot 2x \cdot E_r(r) = -2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{L^3} x \cdot \pi r^2.$$

Отсюда получаем, что в плоскости кольца при смещении r из центра величина вектора напряженности пропорциональна смещению

$$E_r(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{2L^3} r.$$

Уравнение движения бусинки:

$$m\ddot{r} = qE_r(r) = -q \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{2L^3} r.$$

Частота гармонических колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{m} \frac{Q}{2L^3}} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\gamma Q}{2L}},$$

Период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\sqrt{2}\pi L \sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 L}{\gamma Q}}.$$

Задача 4. И снова МГД Модель морского магнитогидродинамического двигателя, установленного под днищем катера (см. рис.) представляет собой прямоугольный канал ($a = 1$ м, $l = 2$ м, $h = 10$ см). К хорошо проводящим плоскостям hl подключен идеальный источник постоянного тока с ЭДС $\mathscr{E} = 100$ В. Магнитное поле $B = 1$ Тл пронизывает канал перпендикулярно непроводящим плоскостям al. При движении катера с таким двигателем с постоянной скоростью u измерена скорость вытекающей относительно катера воды $v = 10$ м/с.

Удельное сопротивление морской воды $\rho = 1 \cdot 10^{-2}$ Ом·м, ее плотность $\rho_{\text{в}} = 1000$ кг/м^3.

Найти скорость движения катера, силу тяги, полезную мощность и КПД двигателя.

Возможное решение 1. Энергетический метод. Перейдем в систему отсчета, в которой катер покоится. В этой системе отсчета скорость движения воды, которая находится далеко от катера равна u, а скорость вытекающей из двигателя воды v. Запишем закон сохранения энергии для воды, которая прошла через канал:

$$\frac{\rho_{в} u^2}{2} + jBl = \frac{\rho_{в} v^2}{2}, \tag{1}$$

где $j = I/(hl)$ - плотность тока, текущего поперек канала.

В канале возникает ЭДС индукции, направленная против ЭДС источника, поэтому полный поперечный ток равен

$$I = \frac{\mathscr{E} - vBa}{R} = \frac{lh}{\rho a}(\mathscr{E} - vBa) \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1) получим:

$$u = \sqrt{v^2 - \frac{2Bl}{\rho \rho_{в} a}(\mathscr{E} - vBa)} = 8 \text{ м/с}.$$

Сила тяги двигателя равна изменению имульса воды, прошедшей через канал:

$$T = \frac{\Delta m}{\Delta t}(v - u) = \rho_{в} ahv(v - u) = 2 \text{ кН}.$$

Полезная мощность:

$$P_{пол} = Tu = 16 \text{ кВт}.$$

Коэффициент полезного действия:

$$\eta = \frac{P_{пол}}{\mathscr{E} I} = \frac{\rho T u a}{lh\mathscr{E}(\mathscr{E} - vBa)} \approx 9\%.$$

Возможное решение 2. Динамический метод. В канале возникает ЭДС индукции, направленная против ЭДС источника. Полный поперечный ток равен

$$I = \frac{\mathscr{E} - vBa}{R} = \frac{lh}{\rho a}(\mathscr{E} - vBa)$$

Сила тяги равна действующей на этот ток силе Ампера:

$$T = F_A = IBa = \frac{lhB}{\rho}(\mathscr{E} - vBa) = 1.8 \text{ кН}. \tag{3}$$

С другой стороны, сила тяги двигателя равна изменению имульса воды, прошедшей через канал за единицу времени:

$$T = \frac{\Delta m}{\Delta t}(v - u) = \rho_{в} ahv(v - u). \tag{4}$$

Приравнивая (1) и (2) получим:

$$u = v - \frac{T}{\rho_{в} ahv} = \frac{lB}{\rho \rho_{в} av}(\mathscr{E} - vBa) = 8.2 \text{ м/с}.$$

Полезная мощность:

$$P_{пол} = Tu = 14.76 \text{ кВт}.$$

Коэффициент полезного действия:

$$\eta = \frac{P_{\text{пол}}}{\mathscr{E} I} = \frac{\rho T u a}{l h \mathscr{E}(\mathscr{E} - vBa)} \approx 8.2\%.$$

Примечание к динамическому методу Использованное в этом решении положение $T = F_A$ в действительности равносильно не вполне корректному использованию закона сохранения импульса. В самом деле, если поток воды через канал с расходом $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho a h v$ на большом расстоянии от катера (в СО, связанной с катером) имеет эффективную площадь сечения S такую, что $u \cdot S = vah$, т.е. $S = ah\frac{v}{u}$. Тогда импульс, проходящий за время Δt через S $(\rho u S \Delta t) \cdot u$, увеличивается за счет импульса силы Ампера $IBa\Delta t$, и конечный импульс $\rho a h v \Delta t v = (\rho u \frac{v}{u} a h \Delta t) u + IBa\Delta t$, и $v^2 = vu + \frac{IB}{\rho h} \Rightarrow u = v - \frac{IB}{\rho h v}$, – ровно то же значение, что получено при $T = F_A$. Но в таком рассуждении не учитывается изменение импульса тех масс воды, которые не проходят через канал, а в них из-за увеличения площади сечения скорость становится меньше u, т.е. часть импульса «теряется» (ясно, что есть градиент давления в потоке и система, к которой мы в альтернативном решении применяем закон сохранения импульса, незамкнута).

Задача 5. Лунное затмение Как известно, Солнце не является точечным источником света, а имеет малый угловой диаметр (при наблюдении с Земли) $2\delta = 0.52°$. Этот факт приводит к тому, что область полной тени за Землей оказывается конечной.

1. Пусть рефракция (явление преломления солнечных лучей в земной атмосфере) отсутствует. На каком расстоянии L_1 от Земли еще будет наблюдаться полная тень? Найдите продолжительность полного лунного затмения в этом случае.

2. В действительности рефракция оказывает существенное влияние на размер области полной тени. Пусть атмосфера Земли имеет приведенную высоту $h = 8$ км и средний показатель преломления $n = 1.00028$.

   Полагая, что границу тени образуют лучи, идущие по касательной к поверхности Земли, определите на каком максимальном расстоянии L_2 теперь будет наблюдаться полная тень? Какая часть площади лунного диска окажется затемнена?

Радиус Земли $R = 6400$ км, ускорение свободного падения $g = 9.8$ м/с^2, угловой диаметр Луны равен угловому диаметру Солнца 2δ, период обращения Луны вокруг Земли $T_0 = 27.3$ сут.

Возможное решение 1. В отсутствие рефракции лучи сходятся под тем же углом, под которым Солнце видно с Земли, то есть 2δ , поэтому $L_1 = R/\delta \approx 1.4 \cdot 10^6$ км. Из второго закона Ньютона для движения Луны по орбите радиуса R_0 с угловой скоростью ω_0:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{GM_З}{R_0^3}} = \sqrt{\frac{gR^2}{R_0^3}}, \qquad \text{откуда} \qquad R_0 = \sqrt[3]{\frac{gT_0^2R^2}{4\pi^2}} \approx 384 \text{ тыс. км.}$$

Отсюда находим диаметр Луны $D = 2\delta R_0 \approx 3.45 \cdot 10^3$ км, а также диаметр темного пятна на уровне Луны (Рис. 2):

$$D_1 = 2R\left(1 - \frac{R_0}{L_1}\right) \approx 9.3 \cdot 10^3 \ .$$

Тогда продолжительность полного лунного затмения:

$$T = \frac{D_1 - D_2}{\omega_0 R_0} = T_0 \frac{D_1 - D_2}{2\pi R_0} \approx 1.6 \text{ ч}$$

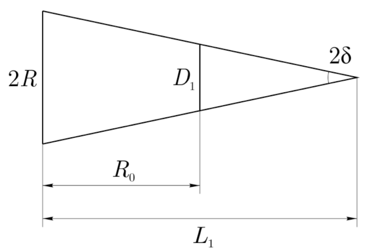

Рис. 2

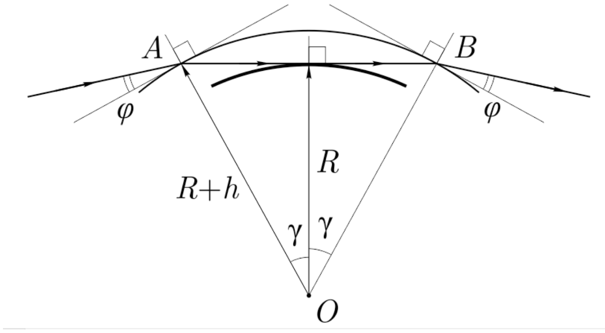

Рис. 3

2. Запишем закон Снелла при преломлении луча на границе с атмосферой:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=n\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right).$$

Учитывая, что $n=1+\Delta n$, где $\Delta n=2.8\cdot 10^{-4}\ll 1$, а также используя приближение малых углов, перепишем формулу в виде

$$1-\frac{\varphi^2}{2}=(1+\Delta n)\left(1-\frac{\gamma^2}{2}\right).$$

Раскроем скобки, пренебрегая слагаемым третьего порядка малости: $(\gamma^2-\varphi^2)/2=\Delta n$, что можно приближённо записать как $\gamma(\gamma-\varphi)=\Delta n$, откуда находим угол отклонения луча:

$$\Delta\varphi=\gamma-\varphi=\frac{\Delta n}{\gamma}.$$

Как видно из рис. 3, $\cos\gamma=R/(R+h)$, откуда:

$$\gamma\approx\sin\gamma=\sqrt{1-\left(\frac{R}{R+h}\right)^2}\approx\frac{\sqrt{2Rh}}{R+h}\approx\sqrt{\frac{2h}{R}}.$$

Луч претерпевает два одинаковых отклонения: при входе в атмосферу и при выходе из неё, поэтому результирующий угол будет равен $2\Delta\varphi$. Таким образом, в условиях рефракции угол ψ, под которым сходятся солнечные лучи, оказывается равным $\psi=2\delta+4\varphi$.

Окончательно получим:

$$L_2=\frac{2R}{2\delta+4\Delta\varphi}=\frac{R}{\delta+\Delta n\sqrt{2R/h}}\approx 408\text{ тыс. км}.$$

Отсюда находим диаметр тёмного пятна на луне

$$D_2=2R\left(1-\frac{R_0}{L_2}\right)\approx 753\text{ км}$$

и искомое отношение площадей $\varepsilon=(D_2/D)^2\approx 4.8\,\%$.