

### Условие

В данной работе предлагается исследовать механические свойства желеобразных веществ, к которым относятся желе, гели, студни. Встречаются и животные с желеобразными телами, например, медуза Аурелия ушастая (Moon Jelly) с прозрачным студенистым телом.

Желеобразные вещества занимают промежуточное положение между жидкими и твёрдыми веществами. Они характеризуются отсутствием текучести, способностью сохранять форму, прочностью, упругими свойствами. По многим своим механическим свойствам эти вещества уникальны. В данной работе вам предлагается определить модуль Юнга  $E$  и скорость звука  $c$  в желатине.

В этой работе вам могут помочь следующие теоретические сведения.

**Модуль Юнга** характеризует упругие свойства вещества, определяя жёсткость различных конструкций. Например, небольшая относительная деформация  $\varepsilon$  цилиндра сечением  $S$  и высотой  $h$  под действием растягивающей (или сжимающей) силы  $F$  равна (по определению модуля Юнга):

$$\varepsilon = \frac{\Delta h}{h} = \frac{F}{ES}.$$

**Изгиб цилиндра.** Пусть цилиндр закреплен в вертикальном положении. Если к верхнему основанию приложить момент сил  $M$ , оно наклонится на угол  $\varphi$  к горизонту. По закону Гука при малых деформациях:

$$M = \kappa\varphi,$$

где  $\kappa$  — жёсткость цилиндра на изгиб. Она определяется модулем Юнга и геометрическими параметрами цилиндра по формуле:

$$\kappa = E \frac{\pi R^4}{4h},$$

где  $R$  — радиус цилиндра, а  $h$  — его высота.

**Кручение цилиндра.** Верхнее основание цилиндра относительно нижнего, закреплённого, основания можно повернуть на угол  $\varphi$  вокруг оси цилиндра в горизонтальной плоскости. Такая деформация называется кручением. При небольших деформациях по закону Гука момент сил  $M$ , необходимый для закручивания цилиндра, также пропорционален углу  $\varphi$ :

$$M = \chi\varphi,$$

где  $\chi \approx E\pi R^4/(6h)$  — крутильная жёсткость желатинового цилиндра.

**Крутильные колебания** возникают, если прикреплённый к верхнему основанию цилиндра стержень отклонить в горизонтальной плоскости от положения равновесия на некоторый угол и отпустить (нижнее основание цилиндра закреплено). Период гармонических колебаний такого Т-образного кру-

тильного маятника определяется крутильной жёсткостью цилиндра и моментом инерции  $I$  маятника относительно оси вращения:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\chi}}$$

**Момент инерции** крутильного маятника (подобно массе груза для пружинного маятника) определяет его инерционность. Момент инерции зависит от распределения масс относительно оси вращения маятника. Так, момент инерции тонкого однородного стержня длиной  $l$  и массой  $m_0$  относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину, равен:

$$I_{\text{ст}} = \frac{m_0 l^2}{12}$$

Если же на стержень нацепить небольшой грузик массой  $m$  на расстоянии  $r$  от оси вращения, то момент инерции маятника увеличится на величину момента инерции грузика  $\Delta I = I_m = mr^2$  и станет равным:

$$I = I_{\text{ст}} + mr^2$$

Это связано с тем, что момент инерции — величина аддитивная.

**Модуль Юнга** входит в формулу для **скорости звука** в различных материалах. Если, например, по торцу тонкого стержня ударить молотком, то по стержню побегит продольная звуковая волна со скоростью  $c = \sqrt{E/\rho}$ . Так, для стали с модулем Юнга  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па и плотностью  $\rho = 7,9$  г/см<sup>3</sup> эта скорость составляет  $c = \sqrt{E/\rho} \approx 5$  км/с.

### Задание

1.1. Изготовьте из желатинового цилиндра диаметром  $D = 29$  мм и длинной деревянной линейки Т-образный маятник (при необходимости, если недостаточно собственной «липкости» желатина, линейку можно подклеить к цилиндру, а сам цилиндр к деревянной подставке с помощью «желатинового» клея). Исследуйте желатиновый цилиндр на изгиб статическим методом. Для этого снимите зависимость  $\varphi(M)$  — изменения угла  $\varphi$  наклона линейки Т-образного маятника под действием приложенного к линейке момента сил  $M$ . Зарисуйте схему установки и опишите методику измерений.

1.2. Результаты измерений п. 1.1 представьте графически.

1.3. По результатам эксперимента п. 1.1 получите значение модуля Юнга  $E$  желатина. Оцените погрешность измерений.

2.1. Исследуйте желатиновый цилиндр Т-образного маятника на кручение динамическим методом. Для этого исследуйте зависимость изменения периода  $T_{\text{крут}}$  крутильных колебаний маятника от изменения момента его инерции. Зарисуйте схему установки и опишите методику измерений.

2.2. Результаты измерений п. 2.1 представьте графически.

2.3. По результатам измерений п. 2.1 получите значение модуля Юнга  $E$  желатина. Оцените погрешность измерений.

3.1. Исследуя поведение тонких ( $d = 19,5$  мм) желатиновых цилиндров на вибрирующей подставке, определите скорость продольных звуковых волн  $c_z$  в желатине. Желатиновые цилиндры выдавливаются из шприцов с помощью поршня. Для приготовления цилиндров необходимой длины используйте канцелярский нож. Зарисуйте схему установки и опишите методику измерений.

**Внимание:** не подавайте на электромоторчик напряжение, превышающее 9,5 В.

*Совет:* отрезать нужную длину образца лучше по мере выдавливания цилиндра, прижимая нож к торцу шприца.

*Подсказка:* вибрирующая подставка может быть реализована с помощью линейки с закреплённым на ней электромоторчиком.

3.2. Сравните полученное значение  $c_z$  с теоретическим, рассчитанным по формуле  $c_T = \sqrt{E/\rho}$ , где  $E$  — модуль Юнга, определённый статическим или динамическим методом. Плотность желатина  $\rho = 1,05$  г/см<sup>3</sup>.

4. С помощью пластиковой ложечки съешьте фруктовое желе. Запишите свои впечатления. Зарисовывать схему установки, описывать методику поедания, определять модуль Юнга и делать оценку погрешности в этом пункте не надо. Ашларыгыз тэмле булсын!

*Примечание.* Этот пункт можно выполнить в любой момент.

**Оборудование.** Широкий шприц с внутренним диаметром  $D = 29$  мм, деревянная подставка, 3 маленьких шприца с внутренним диаметром  $d = 19,5$  мм, электромоторчик постоянного тока с эксцентриком, закреплённый на деревянной линейке, регулируемый источник постоянного тока, стробоскопический тахометр, секундомер, деревянная линейка, канцелярский нож, 2 одинаковые большие гайки массой  $m_T = 9,75$  г каждая, канцелярская клипса, фруктовое желе (яблочное, вишнёвое или клубничное), пластиковая (одноразовая) ложечка. Клей (расплавленный желатин) по требованию.

*Примечание.* Чтобы плавно регулировать напряжение на источнике, поверните ручку пределов напряжения в крайнее правое положение (0-15 В). Остальные положения ручки задают фиксированное значение напряжения.

*Примечание.* Проверьте, что перед включением два левых тумблера повернуты до конца по часовой стрелке, а два правых тумблера — против часовой стрелки. Для изменения напряжения пользуйтесь двумя правыми тумблерами: «COARSE» для грубого изменения и «FINE» для плавного.

## Возможное решение

## Статический метод

Отрежем цилиндр желатина высотой  $h = 35 \pm 1$  мм из толстого шприца (радиус  $R = 14,5$  мм). С помощью клея закрепим его на подставке, а затем приклеим к нему сверху линейку так, чтобы она лежала горизонтально (рис. 1).

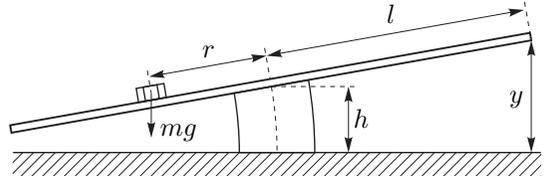


Рис. 1

Для вычисления модуля Юнга снимем зависимость  $\varphi(M)$ . Угол  $\varphi \approx \sin \varphi = \Delta y/l$ . Для изменения момента  $M$  будем использовать гайку. Так как угол  $\varphi$  наклона линейки мал,  $M = mgr \cos \varphi \approx mgr$ . Если гайка начнет сползать, будем закреплять её желатиновым клеем.

Таблица 1.

$r$ , см	$y$ , см	$\Delta y$ , см	$\varphi$ , рад
0	4,4	0,0	0,00
2	6,8	2,4	0,09
3	8,1	3,7	0,14
4	9,2	4,8	0,19
5	10,3	5,9	0,23
6	11,5	7,1	0,27
7	12,6	8,2	0,31
8	13,7	9,3	0,35

Построим график полученной зависимости на рисунке 2 ( $\Delta r = 0,1$  см,  $\Delta \varphi = \Delta(\Delta y)/l + \Delta l/l \approx 0,2/20 = 0,01$ ).

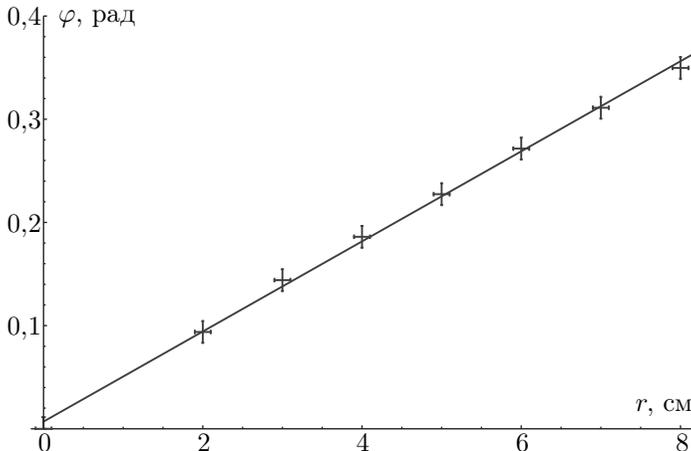


Рис. 2

Угловой коэффициент прямой  $s = 4,36 \pm 0,03 \text{ м}^{-1}$  Вычислим модуль Юнга по формуле:

$$E = \frac{4mgh}{\pi s R^4} = 22 \pm 2 \text{ кПа.}$$

### Динамический метод

В этой части будем использовать установку из предыдущей части. Теперь положим две гайки на одинаковом расстоянии  $r$  от центра (рис. 3).

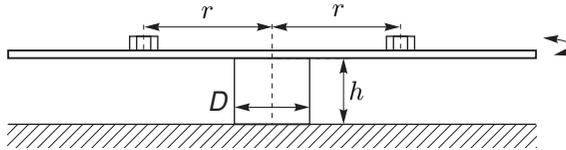


Рис. 3

Аккуратно отклоним линейку на небольшой угол так, чтобы она всё время оставалась горизонтальной (иначе могут возникнуть другие моды колебаний), и отпустим. Возникнут крутильные колебания. Будем измерять время  $t = 10T$ , за которое система совершает 10 колебаний в зависимости от расстояния до гаек  $r$ . Повторим измерения для каждого значения  $r$  несколько раз.

Таблица 2.

$r$ , см	$10T_1$ , с	$10T_2$ , с	$10T_3$ , с	$10T_4$ , с	$10T_5$ , с	$r^2$ , см <sup>2</sup>	$T^2$ , с <sup>2</sup>
0	6,32	6,34	6,35	6,39	6,34	0	0,402
2	6,41	6,41	6,38	6,38	6,47	4	0,410
4	6,87	6,90	6,94	6,84	6,84	16	0,473
6	7,69	7,72	7,62	7,69	7,69	36	0,590
8	8,59	8,66	8,60	8,63	8,66	64	0,744
10	9,68	9,69	9,63	9,68	9,66	100	0,934
12	10,88	10,99	10,91	10,91	10,88	144	1,191
14	12,12	12,15	12,15	12,10	12,09	196	1,469
16	13,37	13,34	13,41	13,34	13,35	256	1,785
18	14,59	14,60	14,63	14,61	14,62	324	2,134
20	15,93	15,91	15,90	15,91	15,92	400	2,532

Момент инерции системы равен  $I = I_0 + 2mr^2$ , где  $I_0$  — момент инерции линейки. Тогда зависимость квадрата периода колебаний  $T^2$  от  $r^2$  будет линейной:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{I}{\chi} = \frac{8\pi^2 m}{\chi} r^2 + \frac{4\pi^2 I_0}{\chi}.$$

Построим линеаризованный график  $T^2(r^2)$  (рис. 4). Погрешности:  $\Delta(r^2) = 2r\Delta r$ ,  $\Delta(T^2) = 2T\Delta T$ ,  $\Delta T \approx 0,2/10 = 0,02$  — время реакции, делённое на количество периодов.

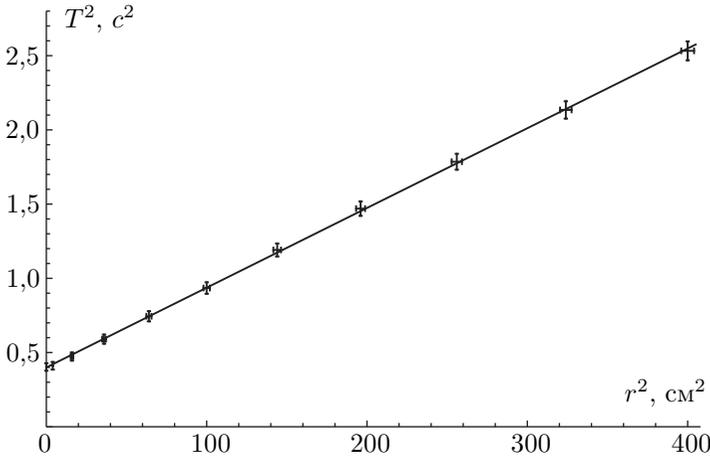


Рис. 4

Угловой коэффициент прямой  $a = 8\pi^2 m/\chi = 53,7 \pm 0,3 \text{ c}^2/\text{м}^2$ . Отсюда, используя выражение для  $\chi$ , получаем, что модуль Юнга

$$E = \frac{6\chi h}{\pi R^4} = \frac{48\pi m h}{a R^4} = 22 \pm 2 \text{ кПа}.$$

### Резонансный метод

В этой части нам потребуются цилиндры разной высоты, которые мы будем нарезать из образцов в тонких шприцах. Соберем установку (рис. 5).

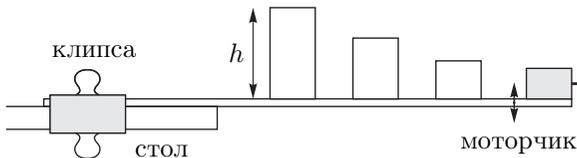


Рис. 5

Линейку с моторчиком закрепим на краю стола с помощью клипсы так, чтобы её конец с двигателем сильно выступал за пределы парты (как минимум, на 10 см). На линейке закрепим несколько желатиновых цилиндров разной высоты. Для каждого цилиндра измерим его резонансную частоту  $\nu_r$ . Для начала настроим частоту с помощью источника тока так, чтобы амплитуда колебаний выбранного цилиндра высотой  $H$  была максимальной. Затем, освещая стробоскопом на вертушку и изменяя частоту вспышек света, найдём положение, когда вертушка моторчика останавливается, и при этом виден

только один винт (если видно несколько винтов, то это кратные частоты). В этом случае частота стробоскопа совпадает с частотой колебаний системы.

В цилиндре возбуждается стоячая волна, при этом, так как амплитуда максимальна на конце цилиндра, то там пучность, значит высота цилиндра — это четверть длины волны, то есть  $h = \lambda/4$ . При этом скорость звука  $c = \lambda\nu_p$ , откуда  $\nu_p = c/(4h)$ . Измерим  $\nu_p$  для нескольких цилиндров разной высоты.

Таблица 3.

$h, \text{см}$	$\nu_p, \text{об/мин}$	$h^{-1}, \text{м}^{-1}$
4,0	1600	25
3,4	2000	29
2,8	2500	36
2,4	2750	42
2,0	3300	50

Построим график зависимости  $4\nu_p(h^{-1})$  (рис. 6).

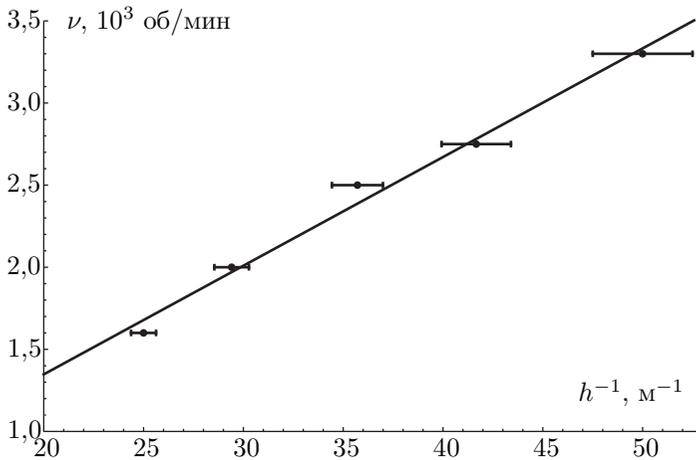


Рис. 6

Угловым коэффициентом проведённой прямой  $k = 66 \pm 10 \text{ м} \cdot \text{об/мин}$ , откуда скорость звука

$$c_s = \frac{4k}{60} = 4,4 \pm 0,7 \text{ м/с}$$

Посчитаем теоретическое значение  $c_T = \sqrt{E/\rho} = 4,6 \pm 0,2 \text{ м/с}$ .

## 4. Приведём один из возможных ответов на этот пункт:

*В первую очередь хочется отметить удачный выбор прозрачной упаковки для яблочного желе, которое позволяет насладиться насыщенным цветом красителей «Куркумин» и «Хлорофиллы» ещё до начала выполнения этого пункта. Желе обладает лёгким приятным запахом ароматизатора «Яблоко», что всячески способствует желанию наконец попробовать его. Нельзя обойти стороной нежную, тающую на языке, текстуру желатина и его сладкий (но не приторный) вкус с нотками лимонной кислоты и сорбата калия. Наконец, судя по текучести желе с ложки на ответные листы, разумно предположить, что и модуль Юнга этого желатина значительно меньше результата, полученного в предыдущих пунктах. Можно было бы подтвердить эту догадку измерением, но делать этого мы, конечно же, не будем.*

<b>1 Статический метод (3,5)</b>		
1.1 Метод измерений		<b>0,2</b>
Таблица измерений (7+ точек, диапазон, регулярность)		<b>1,5</b>
5-6 точек	1	
3-4 точки	0,5	
1.2 График		<b>1</b>
Проведена прямая в области линейности з. Гука	0,4	
Подписаны оси	0,1+0,1	
Выбран хороший масштаб	0,2	
Нанесены кресты ошибок (обосновано)	0,2	
1.3 Ответ $E = 12-23$ кПа		<b>0,6</b>
6-30 кПа	0,3	
Указана погрешность (обосновано)		<b>0,2</b>
<b>2 Динамический метод (5,7)</b>		
2.1 Метод измерений		<b>0,2</b>
Кол-во периодов при измерении времени 10+		<b>1,2</b>
5-9	0,8	
3-5	0,4	
Кол-во точек 7+		<b>1,5</b>
5-6	1,0	
3-4	0,5	
2.2 График		<b>1,6</b>
Линеаризация (величины по осям)	0,6	
Точки ложатся на прямую	0,4	
Подписаны оси	0,1+0,1	
Выбран хороший масштаб	0,1	
Нанесены кресты ошибок (обосновано)	0,3	
2.3 Ответ $E = 12-23$ кПа		<b>0,8</b>
6-30 кПа	0,4	
Указана погрешность (обосновано)		<b>0,4</b>

<b>3</b>	<b>Скорость звука (5,8)</b>		
3.1	Метод измерений		<b>1</b>
	Резонанс при $h = \lambda/4$		<b>1,3</b>
	Измерения (3+ точек)		<b>1,2</b>
	2 точки	0,8	
	1 точка	0,5	
	График		<b>1</b>
	Точки ложатся на прямую	0,4	
	Подписаны оси	0,1+0,1	
	Выбран хороший масштаб	0,1	
	Нанесены кресты ошибок (обосновано)	0,3	
	Эксп. скорость звука $c = 3-6$ м/с		<b>0,6</b>
	1-9 м/с	0,3	
	Указана погрешность обосновано		<b>0,4</b>
3.2	Теор. скорость звука $c = 3-5$ м/с		<b>0,25</b>
	2-6 м/с	0,15	
	Оценена погрешность		<b>0,05</b>
<b>4</b>	<b>Впечатления</b>		<b>0,01</b>
		Сумма	