

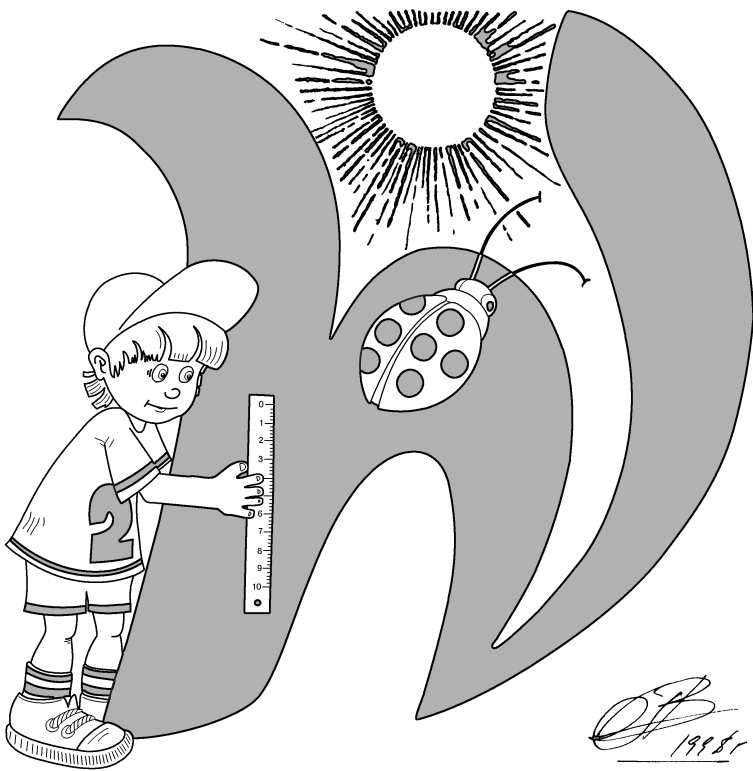
Методическая комиссия по физике
при центральном оргкомитете
Всероссийских олимпиад школьников

XLVII Всероссийская олимпиада школьников по физике

Заключительный этап

Теоретический тур

Методическое пособие



Владивосток, 2013 г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике
при центральном оргкомитете Всероссийских олимпиад школьников
Телефоны: (495) 408-80-77, 408-86-95.
E-mail: physolymp@gmail.com

Авторы задач

9 класс

1. Замятнин М.
2. Иванов М.
3. Домарецкий Д.
4. Замятнин М.
5. Шведов О.

10 класс

1. Савинов Е.
2. Шеронов А.
3. Бутиков Е.
4. Аполонский А.
5. Шеронов А.,
Александров Д.

11 класс

1. Слободянин В.
2. Чивилёв В.
3. Аполонский А.
4. Бабинцев В.
5. Ерофеев И.

Общая редакция — Кóзел С., Слободянин В.

Оформление и вёрстка — Ерофеев И., Паринов Д., Цыбров Ф.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$.
© Авторский коллектив
Подписано в печать 18 апреля 2013 г. в 10:47.

141700, Московская область, г. Долгопрудный
Московский физико-технический институт

Задача 1. Теория относительности

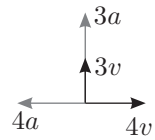


Рис. 1

Две частицы начали движение из одной точки во взаимно перпендикулярных направлениях (рис. 1). Первая — с начальной скоростью $3v$, и постоянным ускорением $3a$, сонаправленным с начальной скоростью, другая — со скоростью $4v$ и постоянным ускорением $4a$, направленным противоположно начальной скорости.

Численно $a = 0,538 \text{ м/с}^2$, $v = 10 \text{ м/с}$.

Каким будет расстояние L между частицами в момент, когда их относительная скорость по модулю опять станет равна начальной относительной скорости? Чему будет равна минимальная относительная скорость $v_{\text{отн}}$ частиц?

Задача 2. Дело — труба!

В теплоизолированном цилиндре на расстоянии $L_1 = 80 \text{ см}$ друг от друга находятся два легкоподвижных теплопроводящих поршня. Пространство между ними заполнено водой, а снаружи на поршни действует атмосферное давление (рис. 2).

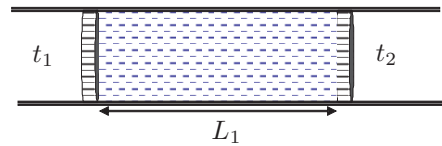


Рис. 2

Слева от левого поршня включили холодильник, который поддерживает постоянную температуру $t_1 = -40^\circ\text{C}$, а справа от правого — нагреватель, поддерживающий постоянную температуру $t_2 = 16^\circ\text{C}$. Через некоторое время система пришла в стационарное состояние и расстояние между поршнями стало L_2 .

После этого поршни снаружи теплоизолировали и дождалась установления теплового равновесия в цилиндре. Расстояние между поршнями стало L_3 . Найдите расстояния L_2 и L_3 . Плотность льда $\rho_{\text{л}} = 900 \text{ кг/м}^3$, плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1000 \text{ кг/м}^3$, удельная теплоёмкость воды $c_{\text{в}} = 4200 \text{ Дж/(кг} \cdot ^\circ\text{C)}$, удельная теплоёмкость льда $c_{\text{л}} = 2100 \text{ Дж/(кг} \cdot ^\circ\text{C)}$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 330 \text{ кДж/кг}$, коэффициент теплопроводности льда в 4 раза больше коэффициента теплопроводности воды.

Указание. Считайте, что мощность теплового потока P вдоль цилиндра, между торцами которого поддерживается постоянная разность температур Δt , равна:

$$P = \frac{kS\Delta t}{L},$$

где k — коэффициент теплопроводности среды, S — площадь торца цилиндра, L — длина цилиндра.

Задача 3. Бусинка на кольце

Тонкое проволочное кольцо массы M стоит на горизонтальной плоскости (рис. 3). По кольцу могут скользить без трения две одинаковые бусинки массой m каждая. В начальный момент времени бусинки находятся вблизи верхней точки кольца. Их одновременно отпускают, и они начинают двигаться симметрично. При каком отношении масс $n = m/M$ кольцо оторвётся от плоскости?

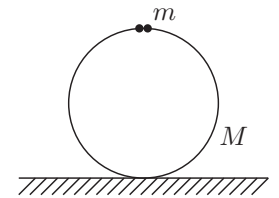


Рис. 3

Задача 4. Лёд в лучах лазера

Для изучения свойств льда, в лаборатории собрали установку из блоков и нитей на штативе, к которым прикрепили четыре льдинки разной массы, поместив их в цилиндрический стакан с водой. Система пришла в равновесие, когда тяжёлые льдинки частично погрузились в воду, а самая лёгкая массой m осталась висеть в воздухе (рис. 4).

По ходу эксперимента, на льдинку, висющую в воздухе, направили луч лазера, и она стала плавиться. Талая вода при этом стекала в стакан.

После сообщения льдинке количества теплоты $Q = 825 \text{ Дж}$ уровень воды в стакане изменился на $\Delta h_1 = 1 \text{ см}$. После полного плавления висящей льдинки, изменение уровня по сравнению с первоначальным составило $\Delta h_2 = 3 \text{ см}$.

1. Увеличивается или уменьшается уровень воды в стакане?
2. Определите, чему равна площадь дна стакана.
3. В каком диапазоне изменялась сила натяжения нити, удерживающей льдинку массой $6m$?

Считайте, что вплоть до полного плавления висящая льдинка m оставалась на нити, не касаясь воды. Блоки и нити невесома. Температура льда и воды в начале и во время эксперимента равнялась комнатной $t_{\text{к}} = 0^\circ\text{C}$. Плотность льда $\rho_{\text{л}} = 900 \text{ кг/м}^3$, плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 330 \text{ кДж/кг}$. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

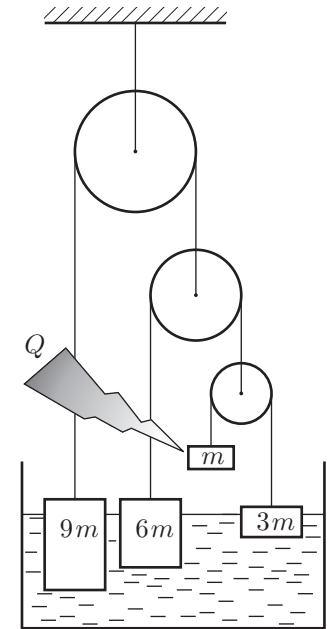


Рис. 4

Задача 5. Реостатика

Экспериментатор Глюк проводит опыты с электрической цепью, схема которой изображена на рисунке 5. Цепь состоит из источника неизвестного напряжения U_0 , резистора $R_3 = 1$ МОм, резисторов R_1 и R_2 с неизвестными сопротивлениями, двух идеальных амперметров и реостата 1–2 — проводника постоянного сечения, к которому подсоединён ползунок 3. Длина реостата составляет $L = 1$ м, а его сопротивление $r = 1$ кОм. Меняя положение ползунка реостата, Глюк построил график зависимости силы тока I_A через амперметр A_1 от длины x участка 1–3 реостата (рис. 6).

1. Найдите отношение сопротивлений $R_1 : R_2$.
2. Изобразите график приближённой зависимости силы тока I_0 через амперметр A_2 от длины x участка 1–3 реостата?
3. Найдите сопротивления резисторов R_1 , R_2 и напряжение источника U_0 .

Примечание. Все значения можно вычислять с погрешностью не более 0,1%.

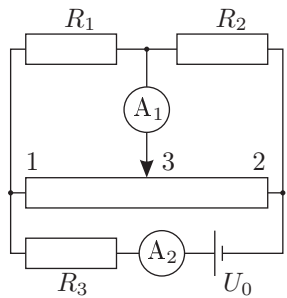


Рис. 5

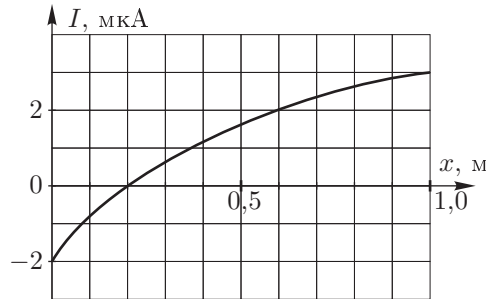


Рис. 6

10 класс

Задача 1. Мешок и трение

Мешочек с песком бросают с горизонтальной поверхности земли под некоторым углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 . После приземления он теряет вертикальную составляющую скорости. Найдите максимальное горизонтальное перемещение мешочка относительно точки бросания и угол α , при котором оно достигается. Коэффициент трения между мешком и плоскостью равен μ . Ускорение свободного падения g . Время удара считайте малым.

Задача 2. Процессы в сосуде

Горизонтально расположенный теплоизолированный цилиндрический сосуд разделён на два отсека неподвижной теплопроводящей перегородкой. Второй отсек отделён от атмосферы подвижным не проводящим тепло поршнем. Оба отсека наполнены азотом; система находится в равновесии. Газ в первом отсеке быстро нагревают. Известно, что с момента сразу после нагрева до восстановления теплового равновесия суммарная внутренняя энергия газа изменилась на ΔU . Найдите изменение внутренней энергии ΔU_1 азота в первом отсеке за тот же промежуток времени. Теплоёмкостью сосуда и поршней можно пренебречь.

Задача 3. Два шарика

Два одинаковых маленьких шарика массы m связаны невесомой и нерастяжимой нитью длины l и покоятся на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 7). Правому шарiku сообщается вертикальная скорость v_0 . Ускорение свободного падения g .

1. Найдите радиус кривизны траектории верхнего шарика в момент, когда нить вертикальна.
2. При каком значении начальной скорости v_0 нижний шарик в этот момент перестанет давить на плоскость?

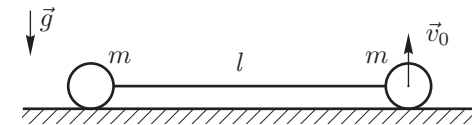


Рис. 7

Задача 4. Эксперимент

Два вертикальных цилиндрических сосуда соединены в нижней части трубкой с манометром пренебрежимо малого объёма (рис. 8). Внутри цилиндров установлены поршни, в верхней части цилиндров — упоры, ограничивающие подъём поршней. Расстояния от нижней

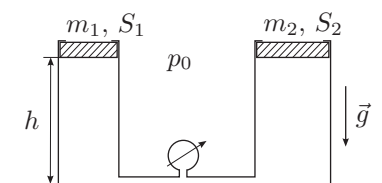


Рис. 8

части поршней до дна цилиндров при верхнем расположении поршней одинаковы и равны $h = 1$ м. Под поршнями находится один моль идеального газа, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Поршни могут перемещаться в цилиндрах без трения.

В таблице представлены результаты измерений давления в цилиндрах при пяти различных значениях температуры газа:

$t, ^\circ\text{C}$	-50,0	-32,4	27,8	174,7	264,1
$p, 10^5$ Па	2,0	2,0	2,5	2,5	3,0

Определите массы обоих поршней m_1, m_2 и площади сечения цилиндров S_1, S_2 .

Задача 5. Электрическая цепь

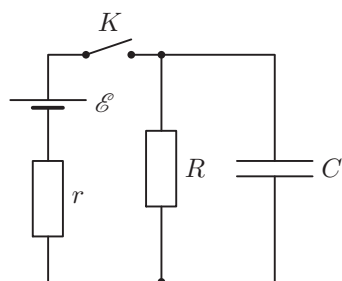


Рис. 9

В схеме (рис. 9) все элементы можно считать идеальными. ЭДС источника $\mathcal{E} = 4,0$ В, сопротивления резисторов $r = 50$ кОм, $R = 150$ кОм, ёмкость конденсатора $C = 2,0$ мФ. До замыкания ключа ток в цепи отсутствовал. Ключ замыкают на некоторое время, а затем размыкают. За время, пока ключ был замкнут, в схеме выделилось количество теплоты $Q_1 = 7,43$ мДж, а после размыкания ключа, в схеме выделилось количество теплоты $Q_2 = 1,00$ мДж.

1. Какой заряд протёк через резистор R пока ключ был замкнут?
2. На какое время замкнули ключ?

11 класс

Задача 1. Колебания спицы

На концах лёгкой спицы длины L закреплены два одинаковых маленьких металлических шарика (рис. 10). Спицу поставили на подставку ширины $l \ll L$ так, что её середина оказалась над серединой подставки, и отклонили на небольшой угол $\varphi_0 \ll 1$. Определите период малых колебаний спицы, если при переходе спицы с одного ребра на другое потери энергии пренебрежимо малы, а спица от подставки не отрывается и не проскальзывает.

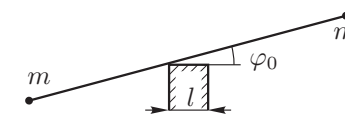


Рис. 10

Задача 2. Трое в поле, не считая конденсатора

Из одного куска проволоки спаяна плоская фигура (рис. 11), состоящая из трёх квадратов со стороной a . В один из отрезков проволоки впаян небольшой по размерам конденсатор ёмкости C . Конструкция находится в однородном магнитном поле \vec{B} , которое перпендикулярно плоскости фигуры и увеличивается с постоянной скоростью $dB/dt = k > 0$. Сопротивление куска проволоки длины a равно r . Для установившегося режима определите:

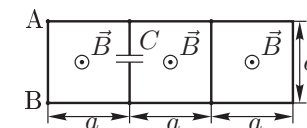


Рис. 11

1. силу и направление тока в отрезке АВ;
2. заряд на конденсаторе Q и знак зарядов на обкладках;
3. количество теплоты W , выделяющееся в цепи за время τ .

Задача 3. Восстановление линзы

Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли оптическую схему, на которой были изображены идеальная тонкая линза, предмет и его изображение. Из текста следует, что предмет представляет собой стержень длины l с двумя точечными источниками на концах. Стержень и главная оптическая ось находились в плоскости рисунка, а также стержень не пересекал плоскость линзы. От времени чернила выцвели и на рисунке остались видны лишь сами источники и их изображения, причём неизвестно, какая из четырёх точек чему соответствует. Интересно, что эти точки располагаются в вершинах и в центре равностороннего треугольника (рис. 12).

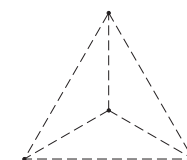


Рис. 12

1. Определите, самому предмету или его изображению принадлежит точка в центре треугольника.
2. Восстановите оптическую схему (предмет, изображение, линзу, её главную оптическую ось, фокусы) с точностью до поворота рисунка на 120° и отражения.
3. Найдите фокусное расстояние линзы.

Примечание. Линза называется идеальной, если любой пучок параллельных лучей фокусируется в фокальной плоскости.

Задача 4. Давление газировки

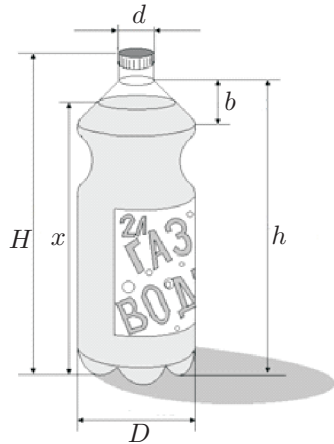


Рис. 13

масса углекислого газа $\mu = 44$ г/моль.

Геометрические размеры бутылки: $d = 3$ см, $b = 10$ см, $h = 27$ см, $H = 30$ см, $D = 13$ см.

Примечание. Считайте, что растворимость газов σ при постоянной температуре пропорциональна их парциальному давлению над жидкостью (закон Генри), а график зависимости растворимости углекислого газа в воде от температуры при его парциальном давлении $p_0 = 100$ кПа дан на рисунке 14. Парциальным давлением паров воды в данном диапазоне температур можно пренебречь. Растворимость σ — масса газа (в граммах), растворённого в 1 кг жидкости.

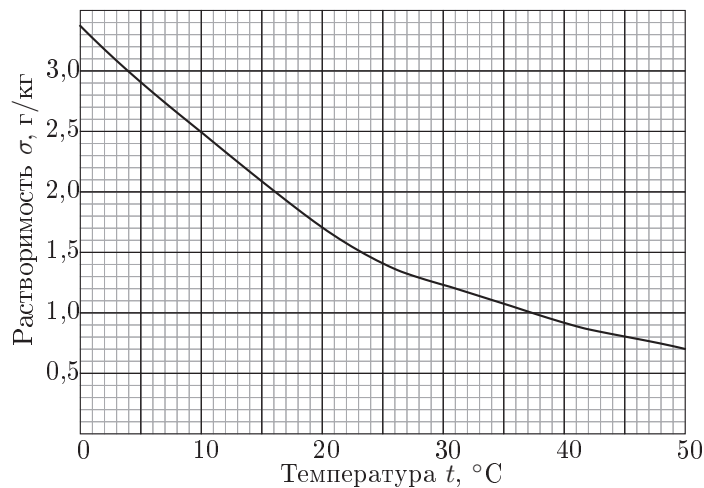


Рис. 14

На заводе воду в бутылках (рис. 13) обезгаживают (извлекают растворённый воздух), газуют углекислым газом до насыщения при температуре $t_1 = 4^\circ\text{C}$ и давлении $p_1 = 150$ кПа, а затем герметично закрывают и отправляют на склад, где температура воздуха согласно условиям хранения не превышает $t_2 = 35^\circ\text{C}$. Пренебрегая изменением объёма жидкости и бутылки, определите:

1. минимальный объём надводной части V_0 , если максимальное давление в бутылке при хранении $p_2 = 370$ кПа;
2. уровень x , до которого на заводе наливают воду, соответствующий этому объёму.

Масса воды в бутылке $m_b = 2$ кг, молярная

Задача 5. Неисправная ракета

Лейтенант-экспериментатор Глюк проводил свои исследования на военном полигоне с новыми сигнальными ракетами, которые во время полёта с постоянной скоростью v издают звук постоянной частоты f_0 , при помощи датчиков частоты. Скорость звука на полигоне $c = 330$ м/с.

1. Какой частоты звук будет принимать датчик, если ракета летит строго на него?
2. Какой частоты звук будет принимать датчик, расположенный на большом удалении от летящей ракеты, если угол между скоростью ракеты и направлением на датчик равен φ .
3. Проводя исследования лейтенант-экспериментатор Глюк случайно выпустил неисправную сигнальную ракету, которая стала летать вдоль поверхности полигона на малой высоте с той же постоянной скоростью v по кругу радиуса r . Ракету успешно нейтрализовали, а лейтенант-экспериментатор обратил внимание на графики самописца, который записывал зависимость частоты звука от времени у двух датчиков 1 и 2, расположенных на полигоне. Используя полученные графики (рис. 15), помогите лейтенант-экспериментатору Глюку определить расстояние L между этими датчиками.

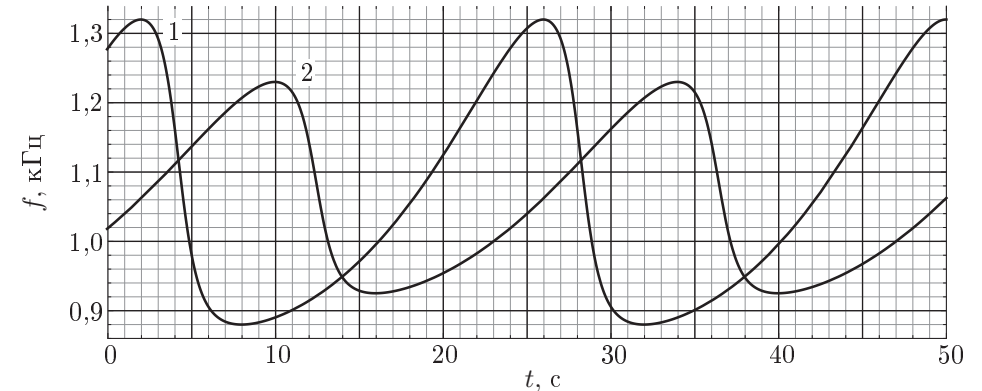


Рис. 15

Возможные решения

9 класс

Задача 1. Теория относительности

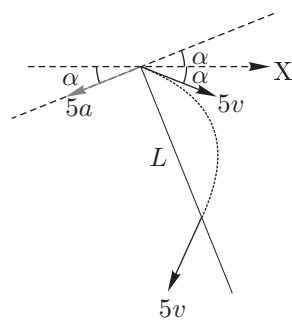


Рис. 16

Перейдём в систему отсчёта, связанную с одной из частиц (например, первой). Воспользуемся законом сложения скоростей и ускорений. Так как скорости частиц всё время остаются перпендикулярными (как и ускорения), то мы можем воспользоваться теоремой Пифагора. В итоге получим, что вторая частица начинает движение со скоростью $5v$ и ускорением $5a$ (рис. 16). Пусть вторая частица двигалась вдоль оси OX . В новой системе отсчёта угол α между осью OX и начальной скоростью (и начальным ускорением) найдём из условия перпендикулярности скоростей (и ускорения частиц) в старой системе отсчёта: $\operatorname{tg} \alpha = 3/4$, $\alpha = 36,87^\circ$. По аналогии с задачей о дальности полёта тела, брошенного под углом 2α к вертикали, получим:

$$L = \frac{(5v)^2 \sin 4\alpha}{5a} = \frac{5v^2 \sin 4\alpha}{a} = 500 \text{ м.}$$

Относительная скорость станет минимальной в тот момент, когда вектор скорости окажется перпендикулярным вектору ускорения. Таким образом, $v_{\text{отн(мин)}} = 5v \sin 2\alpha = 48 \text{ м/с}$.

Задача 2. Дело — труба!

Пусть в первом случае столб воды имеет длину $L_{\text{в}}$, а столб льда $L_{\text{л}}$. Тогда:

$$L_{\text{в}} + L_{\text{л}} = L_2. \quad (1)$$

Так как масса содержимого между поршнями постоянна:

$$L_{\text{в}}\rho_{\text{в}} + L_{\text{л}}\rho_{\text{л}} = L_1\rho_{\text{в}}. \quad (2)$$

Поскольку тепловые потоки через лёд и воду равны, то:

$$\frac{kS(t_2 - t_0)}{L_{\text{в}}} = \frac{4kS(t_0 - t_1)}{L_{\text{л}}}, \quad \text{где } t_0 = 0^\circ\text{C}. \quad (3)$$

Из уравнения (3), с учетом заданных температур находим, что $L_{\text{л}} = 10L_{\text{в}}$. Из уравнений (1) и (2) получим: $L_{\text{в}} = 8 \text{ см}$, и $L_2 = 11L_{\text{в}} = 88 \text{ см}$.

Тепловой поток P через каждое сечение одинаков:

$$P = \frac{kS(t'_2 - t'_1)}{\Delta L},$$

где t'_1, t'_2 — температуры слева и справа от фрагмента цилиндра длиной ΔL . Отсюда $t'_2 - t'_1 = (P\Delta L)/(kS)$, то есть $\Delta t \sim \Delta L$. Это означает, что температура льда и воды от поршня до границы раздела изменяется по линейному закону, поэтому можно считать, что соответствующие части системы имеют среднюю температуру (лёд $t_{\text{л}} = -20^\circ\text{C}$, вода $t_{\text{в}} = 8^\circ\text{C}$). После того как системе теплоизолировали, между поршнями устанавливается тепловое равновесие с некоторой температурой t . При охлаждении воды до температуры плавления *выделится* количество теплоты

$$Q_1 = L_{\text{в}}S\rho_{\text{в}}c_{\text{в}}t_{\text{в}} = 33\,600 L_{\text{в}}S\rho_{\text{в}}.$$

Для нагревания льда до температуры плавления *потребуется* количество теплоты

$$Q_2 = 10L_{\text{в}}S0,9\rho_{\text{в}}c_{\text{л}}(0 - t_{\text{л}}) = 378\,000 L_{\text{в}}S\rho_{\text{в}}.$$

Следовательно, вода точно охладится до 0°C и начнет замерзать. При замерзании выделится количество теплоты

$$Q_3 = \lambda L_{\text{в}}S\rho_{\text{в}} = 330\,000 L_{\text{в}}S\rho_{\text{в}}.$$

Этого тепла не хватит, чтобы нагреть лёд до температуры плавления. Следовательно, вся вода замерзнет. Тогда:

$$L_3 = \frac{10}{9}L_1 \approx 88,9 \text{ см.}$$

Задача 3. Бусинка на кольце

В силу симметрии системы, при движении бусинок кольцо не будет смещаться по горизонтали. Для отрыва кольца от плоскости необходимо, чтобы $N_1 = 0$ (рис. 17). Это возможно, если силы реакции со стороны бусинок на кольцо N направлены от центра. К этому моменту времени каждая из бусинок сместится от вертикали на угол α (рис. 18). Тогда по второму закону Ньютона для каждой из них будет справедливо соотношение:

$$m\frac{v^2}{R} = N + mg \cos \alpha,$$

где N — сила, действующая на бусинку со стороны кольца.

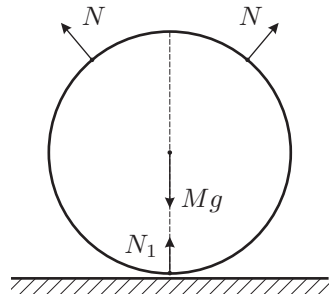


Рис. 17

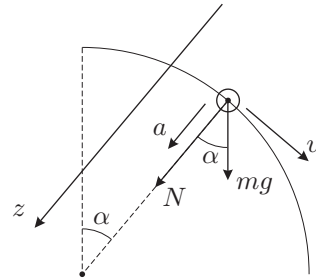


Рис. 18

Согласно закону сохранения энергии, верно равенство:

$$m \frac{v^2}{2} = mgR(1 - \cos \alpha).$$

Решая совместно эти уравнения, получим:

$$N = mg(2 - 3 \cos \alpha).$$

Для момента отрыва кольца:

$$2N \cos \alpha = Mg.$$

Из полученного выражения можно найти отношение m/M :

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{2(2 \cos \alpha - 3 \cos^2 \alpha)}.$$

В знаменателе квадратичная зависимость с максимумом при $\cos \alpha = 1/3$, при этом $m/M = 3/2$. Следовательно, отрыв происходит при

$$\frac{m}{M} \geq \frac{3}{2}.$$

Задача 4. Лёд в лучах лазера

Расставим силы натяжения нитей (рис. 19). Заметим, что из условия равновесия висящей льдинки:

$$T = mg. \quad (4)$$

По мере уменьшения её массы пропорционально будет уменьшаться сила натяжения всех нитей в системе. Поэтому сила натяжения нити, удерживающей $6m$, изменяется от 0 до $2mg$.

Изменение уровня воды в стакане можно связать с изменением внешней силы, действующей на систему со стороны штатива.

Найдём силу, действующую на дно стакана со стороны содержимого, двумя разными способами, с учётом того, что масса системы (льда, воды, блоков, нитей) при этом не изменяется:

1. Как силу, обратную действующей по третьему закону Ньютона на содержимое со стороны дна, найденную из условия равновесия содержимого:

$$8T + F_{\text{на дно}} = m_{\text{системы}}g,$$

что с учётом уравнения (4) даст:

$$8mg + F_{\text{на дно}} = m_{\text{системы}}g.$$

2. Как сумму реальных сил, с которыми содержимое действует на дно:

$$F_{\text{на дно}} = \rho ghS,$$

где $F_{\text{на дно}}$ — сила гидростатического давления (дна ничто не касается). После сообщения льдинке количества теплоты Q её масса уменьшается на $\Delta m = Q/\lambda$. Уравнения для новой силы, действующей на дно, примут вид:

$$8(m - \Delta m)g + F_{\text{на дно}}^* = m_{\text{системы}}g,$$

$$F_{\text{на дно}}^* = \rho gS(h + \Delta h_1).$$

Приравнявая уравнения по массе всего содержимого, получим:

$$\rho gS\Delta h_1 = 8\Delta m \quad (5)$$

или $\rho gS\Delta h_1 = 8Q/\lambda$, откуда находим площадь дна стакана:

$$S = \frac{8Q}{\Delta h_1 \rho \lambda} = 20 \text{ см}^2.$$

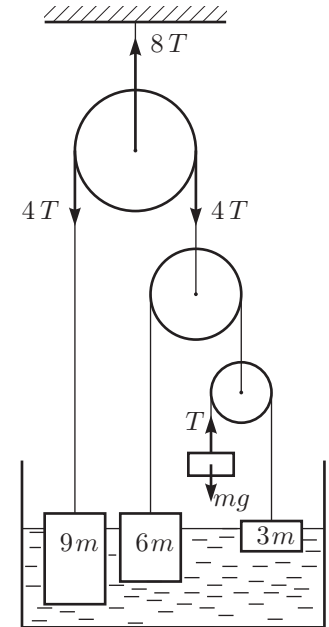


Рис. 19

Заметим, что знак Δh_1 положительный, следовательно, уровень поднимается. Из уравнения (5) видно, что высота уровня будет линейно увеличиваться по мере уменьшения массы висящей льдинки. После полного плавления, система уравнений для силы на дно примет вид:

$$\begin{cases} F_{\text{на дно}}^{**} = m_{\text{системы}}g, \\ F_{\text{на дно}}^{**} = \rho gS(h + \Delta h_2). \end{cases}$$

Откуда $\rho S\Delta h_2 = 8m$, и диапазон изменения силы натяжения нити, прикреплённой к $6m$, составит $0 < T < \rho gS\Delta h_2/4$, или $0 < T < 0,15 \text{ Н}$.

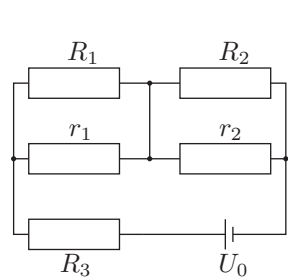


Рис. 20

Задача 5. Реостатика

1. Из графика следует, что при $x = 0,2$ м ток через амперметр не идёт. Поскольку сопротивление однородного проводника постоянной площади пропорционально длине, отношение сопротивлений $r_1 : r_2 = 1 : 4$ (рис. 20). При этом, токи через резисторы R_1 и R_2 равны, и отношение напряжений U_1 и U_2 на сопротивлениях R_1 и R_2 составляет $U_1 : U_2 = R_1 : R_2$. Аналогично, из совпадения токов через резисторы r_1 и r_2 находим $U_1 : U_2 = r_1 : r_2$. Отсюда:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{4}.$$

2. Общее сопротивление параллельно соединённых резисторов R_1 и r_1 не превосходит r_1 , а параллельно соединённых резисторов R_2 и r_2 — не превосходит r_2 . Следовательно, цепь, состоящая из четырех резисторов R_1 , r_1 , R_2 и r_2 , не может иметь сопротивление больше $r_1 + r_2 = 1$ кОм. Поэтому общее сопротивление всей цепи с учетом сопротивления R_3 будет лежать в интервале от 1 МОм до 1,001 МОм.

Таким образом, с точностью не более 0,1% сила тока через источник напряжения будет равна $I_0 = U_0/R_3$ на протяжении всего опыта — график Глюка для показания амперметра A_2 был бы на глаз неотличим от горизонтальной прямой.

3. Когда амперметр находится в положении 1, и через него проходит ток $I_1 = |I_A| = 2$ мкА, напряжение на реостате r составляет $(I_0 - I_1)r$, а напряжение на резисторе R_2 равно $I_1 R_2$. Отсюда $(I_0 - I_1)r = I_1 R_2$.

Когда амперметр находится в положении 2, и через него проходит ток $I_2 = |I_A| = 3$ мкА, напряжение на реостате r составляет $(I_0 - I_2)r$, а напряжение на резисторе R_1 равно $I_2 R_1$. Отсюда $(I_0 - I_2)r = I_2 R_1$.

Разделив полученные соотношения друг на друга и используя свойство $R_2/R_1 = 4$, находим: $(I_0 - I_1) : (I_0 - I_2) = 4I_1 : I_2$. Таким образом, $I_0 = 3,6$ мкА, откуда с учётом предыдущих соотношений следует:

$$R_1 = 0,2 \text{ кОм}, \quad R_2 = 0,8 \text{ кОм}, \quad U_0 = I_0 R_3 = 3,6 \text{ В}.$$

10 класс

Задача 1. Мешок и трение

Перед ударом о землю скорость мешочка равна v_0 и направлена под углом α к горизонту.

Во время соударения на мешочек действует вертикальная сила реакции опоры N и горизонтальная сила трения F . Если в течение всего удара выполняется равенство $F = \mu N$, то импульс, сообщённый мешочку силой трения, будет в μ раз больше импульса, сообщённого силой N :

$$P_N = mv_y = mv_0 \sin \alpha, \quad P_F = \mu P_N = \mu mv_0 \sin \alpha.$$

Отсюда можно найти скорость мешочка по окончании удара:

$$mu = mv_x - \mu mv_y, \quad u = v_0(\cos \alpha - \mu \sin \alpha).$$

При $\mu > \text{ctg} \alpha$ скорость u в предположении $F = \mu N$ получается отрицательной. Это означает, что в этом случае горизонтальная скорость мешочка обратится в ноль ещё до окончания удара по вертикали, то есть мешочек сразу после удара будет неподвижен.

Таким образом, в этой задаче возможны два случая, требующие отдельного рассмотрения.

1. При $\text{ctg} \alpha < \mu$ мешочек в результате удара останавливается, дальность полёта равна

$$L_1 = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. \quad \text{откуда} \quad L_{1 \max} = \frac{v_0^2}{g},$$

при этом максимальная дальность $L_{1 \max}$ достигается при $\alpha = 45^\circ$.

2. При $\text{ctg} \alpha > \mu$ мешочек после удара некоторое время скользит по поверхности, проходя дополнительное расстояние. Полная дальность L_2 в этом случае складывается из дальности полёта l_1 и расстояния l_2 , пройденного мешочком по поверхности до остановки:

$$l_1 = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha, \quad l_2 = \frac{u^2}{2a},$$

где $u = v_0(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)$, $a = \mu g$. Полная дальность L_2 равна:

$$\begin{aligned} L_2 = l_1 + l_2 &= \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha + \frac{v_0^2}{2\mu g} (\cos \alpha - \mu \sin \alpha)^2 = \\ &= \frac{v_0^2}{2\mu g} (4\mu \sin \alpha \cos \alpha + (\cos \alpha - \mu \sin \alpha)^2) = \frac{v_0^2}{2\mu g} (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)^2. \end{aligned}$$

Максимум выражения $\cos \alpha + \mu \sin \alpha$ достигается при $\text{tg} \alpha = \mu$ и равен $\sqrt{\mu^2 + 1}$, поэтому для максимальной дальности во втором случае получаем

$$L_{2 \max} = \frac{v_0^2}{g} \frac{\mu^2 + 1}{2\mu}.$$

Этот результат можно получить проще, если заметить, что при выполнении условия $F = \mu N$ сумма сил трения и нормальной реакции всегда составляет с вертикалью угол φ такой, что $\operatorname{tg} \varphi = \mu$. По этой причине проекция мешочка на ось, составляющую угол φ с горизонтом движется равноускоренно с ускорением $a = -g \sin \varphi$ во время полёта, удара и скольжения. Отсюда легко находится максимальная дальность:

$$L \cos \varphi = \frac{(v_0 \cos(\alpha - \varphi))^2}{2g \sin \varphi}, \quad L = \frac{(v_0 \cos(\alpha - \varphi))^2}{g \sin 2\varphi},$$

$$L_{2 \max} = \frac{v_0^2}{g \sin 2\varphi} \text{ при } \alpha = \varphi.$$

Максимальная дальность во втором случае не меньше, чем в первом. Это означает, что если условие $\operatorname{tg} \alpha = \mu$ не противоречит условию $\operatorname{ctg} \alpha > \mu$, то есть при $\mu < 1$, максимальная дальность равна $L_{2 \max}$.

При $\mu > 1$ дальность L_2 монотонно растёт с увеличением угла α , поэтому её максимальное значение соответствует максимально возможному значению угла, которое определяется условием $\operatorname{ctg} \alpha = \mu$:

$$\begin{aligned} L_{2 \max} &= \frac{v_0^2}{2\mu g} (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2\mu g} (\operatorname{ctg} \alpha + \mu)^2 = \\ &= \frac{v_0^2}{2\mu g} \frac{(\operatorname{ctg} \alpha + \mu)^2}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{v_0^2}{2\mu g} \frac{(2\mu)^2}{1 + \mu^2} = \frac{v_0^2}{g} \frac{2\mu}{1 + \mu^2} \leq \frac{v_0^2}{g} = L_{1 \max}. \end{aligned}$$

Поэтому при $\mu > 1$ максимально возможной будет дальность L_1 .

Окончательно:

$$L_{\max} = \begin{cases} \frac{v_0^2}{g} \frac{\mu^2 + 1}{2\mu}, & \text{при } \operatorname{tg} \alpha_{\max} = \mu, \text{ если } \mu \leq 1, \\ \frac{v_0^2}{g}, & \text{при } \alpha_{\max} = 45^\circ, \text{ если } \mu > 1. \end{cases}$$

Задача 2. Процессы в сосуде

Сосуд теплоизолирован, поэтому первое начало термодинамики выглядит так:

$$0 = \Delta U + p_0 \Delta V_2,$$

где p_0 — атмосферное давление снаружи подвижной перегородки, ΔV_2 — изменение объёма второго отсека.

Уравнение состояния газа во втором отсеке:

$$p_0 \Delta V_2 = \nu_2 R \Delta T_2.$$

Запишем первое начало термодинамики для каждого газа:

$$\Delta U_1 + \Delta U_2 + p_0 \Delta V_2 = \Delta U_1 + \frac{5}{2} \nu_2 R \Delta T_2 + p_0 \Delta V_2 = \Delta U_1 - \frac{7}{2} \Delta U = 0.$$

Отсюда получаем окончательный ответ:

$$\Delta U_1 = \frac{7}{2} \Delta U.$$

Задача 3. Два шарика

В критическом случае (при минимально возможной v_0) отрыв нижнего шарика произойдёт в момент, когда нить вертикальна и её натяжение равно mg (рис. 21). Скорость верхнего шарика v в этот момент горизонтальна, и из сохранения горизонтальной проекции импульса системы получаем, что скорость нижнего шарика равна по величине и противоположна по направлению скорости верхнего. Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = 2 \frac{mv^2}{2} + mgl,$$

откуда находим: $v^2 = v_0^2/2 - gl$.

В системе отсчёта (неинерциальной), в которой нижний шарик всё время неподвижен, верхний шарик движется по окружности радиуса l и его скорость в рассматриваемый момент равна $2v$, поэтому ускорение верхнего шарика направлено вниз и равно

$$a = \frac{(2v)^2}{l}.$$

Ускорение нижнего шарика в момент отрыва равно нулю, поэтому ускорение верхнего шарика относительно инерциальной системы отсчёта тоже равно $a = 4v^2/l$. Второй закон Ньютона для верхнего шарика:

$$m \frac{4v^2}{l} = mg + T.$$

Поскольку $T = mg$, то, $2v^2 = gl$, откуда, с учётом выражения для v , получим $v_0^2 = 3gl$.

Таким образом, нижний шарик оторвётся от плоскости при:

$$v_0 > \sqrt{3gl}.$$

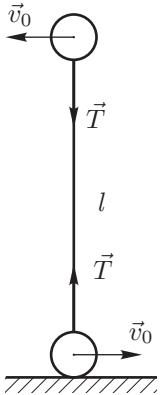


Рис. 21

Задача 4. Эксперимент

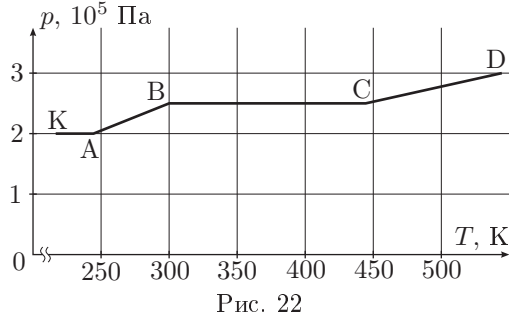


Рис. 22

Теоретический вид зависимости давления от температуры для данной системы представлен на рисунке 22. Давление на участке КА:

$$p_{КА} = p_0 + \left(\frac{m_i}{S_i}\right)_{\min} g,$$

где $\left(\frac{m_i}{S_i}\right)_{\min}$ — меньшая из двух величин $\frac{m_1}{S_1}$ и $\frac{m_2}{S_2}$. (В дальнейшем для опреде-

делённости будем считать меньшей $\frac{m_1}{S_1}$). На этом участке в цилиндре площади S_1 протекает изобарический процесс до момента поднятия поршня до упора (точка А на графике).

При дальнейшем увеличении температуры объём газа не меняется, а давление растёт вплоть до момента начала движения второго поршня (точка В). На участке АВ:

$$p_{AB} = \frac{\nu RT}{S_1 h}.$$

В точке В давление

$$p_B = p_0 + \frac{m_2 g}{S_2}.$$

При дальнейшем росте температуры давление не меняется до момента, когда второй поршень достигает верхнего положения (точка С).

Далее снова протекает изохорный процесс при объёме $(S_1 + S_2)h$, так что:

$$p_{CD} = \frac{\nu RT}{(S_1 + S_2)h}.$$

Заметим, что данные таблицы таковы, что

$$\frac{p_2}{p_3} = \frac{T_2}{T_3}, \quad \frac{p_4}{p_5} = \frac{T_4}{T_5}, \quad p_1 = p_2, \quad p_3 = p_4,$$

где p_i, T_i — давление и температура в Кельвинах в соответствующих ячейках таблицы. Значит, параметры во второй, третьей и четвёртой ячейках таблицы соответствуют точкам А, В, С. Тогда для участка АВ:

$$p_B - p_A = \frac{\nu R}{S_1 h}(T_B - T_A), \quad \text{откуда} \quad S_1 = 0,01 \text{ м}^2.$$

Массу m_1 найдём из уравнения:

$$p_A = p_0 + \frac{m_1 g}{S_1}, \quad \text{следовательно,} \quad m_1 = 100 \text{ кг}.$$

Аналогично:

$$S_1 + S_2 = \frac{\nu R(T_D - T_C)}{(p_D - p_C)h}, \quad \text{откуда} \quad S_2 = 0,005 \text{ м}^2, \quad m_2 = 75 \text{ кг}.$$

Задача 5. Электрическая цепь

1) Тепло Q_2 , выделившееся в схеме после размыкания ключа, равно энергии конденсатора в момент размыкания:

$$Q_2 = \frac{q_C^2}{2C}, \quad \text{откуда} \quad q_C = \sqrt{2CQ_2} = 2,00 \text{ мКл}.$$

Полное тепло равно работе источника:

$$\mathcal{E}q_{\mathcal{E}} = Q_1 + Q_2, \quad \text{откуда} \quad q_{\mathcal{E}} = \frac{Q_1 + Q_2}{\mathcal{E}} = 2,11 \text{ мКл}.$$

Через резистор R протёк заряд

$$q_R = q_{\mathcal{E}} - q_C = \frac{Q_1 + Q_2}{\mathcal{E}} - \sqrt{2CQ_2} = 0,11 \text{ мКл}.$$

2) При замкнутом ключе в произвольный момент времени справедливо следующее из второго правила Кирхгофа равенство:

$$\mathcal{E} = I_R R + I_r r.$$

Домножив его на малое время Δt , получим связь протекших за это время зарядов:

$$\mathcal{E} \Delta t = R I_R \Delta t + r I_r \Delta t = R \Delta q_R + r \Delta q_r.$$

Просуммировав подобные равенства за всё время до размыкания ключа, получим:

$$\mathcal{E} t = R q_R + r q_r,$$

откуда с учётом $q_r = q_{\mathcal{E}}$ получаем:

$$t = \frac{R q_R + r q_{\mathcal{E}}}{\mathcal{E}} = \frac{R + r}{\mathcal{E}^2} (Q_1 + Q_2) - \frac{R}{\mathcal{E}} \sqrt{2CQ_2} = 30,4 \text{ с}.$$

11 класс

Задача 1. Колебания спицы

Рассмотрим вращение спицы вокруг левого края подставки. Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий шариков:

$$K = \frac{m}{2} \left(\frac{L-l}{2} \right)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{L+l}{2} \right)^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{m(L^2+l^2)}{4} \dot{\varphi}^2 \approx \frac{mL^2}{4} \dot{\varphi}^2.$$

Потенциальная энергия системы:

$$\Pi = -mg \left(\frac{L-l}{2} \right) \varphi + mg \left(\frac{L+l}{2} \right) \varphi = mgl\varphi.$$

Механическая энергия системы сохраняется, поэтому:

$$\dot{K} + \dot{\Pi} = \frac{mL^2}{2} \ddot{\varphi} \dot{\varphi} + mgl\dot{\varphi} = 0.$$

Разделив на $\dot{\varphi}$ (решение $\dot{\varphi} = 0$ нас не интересует), получим уравнение равноускоренного движения:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2gl}{L^2}.$$

Время τ , за которое спица вернётся в горизонтальное положение, найдём из условия:

$$\frac{\ddot{\varphi}\tau^2}{2} = -\varphi_0, \quad \text{откуда,} \quad \tau = \sqrt{\frac{\varphi_0}{gl}}L.$$

После того, как спица вернётся в горизонтальное положение, она начнёт движение относительно правого угла подставки, затем снова относительно левого и так далее. Период такого движения:

$$T = 4\tau = 4L\sqrt{\frac{\varphi_0}{gl}}.$$

Задача 2. Трое в поле, не считая конденсатора

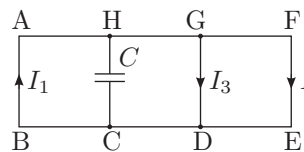


Рис. 23

Через достаточно большое время, конденсатор зарядится так, что ток через него течь не будет, и токи во всей цепи установятся. Предположим, что токи текут так, как показано на рисунке (рис. 23).

Закон Кирхгофа для контуров:

$$AFEB : \mathcal{E}_{AFEB} = 5I_1r + 3I_2r, \quad (6)$$

$$AGDB : \mathcal{E}_{AGDB} = 5I_1r + I_3r, \quad (7)$$

и первый закон Кирхгофа для точки D:

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

Из закона электромагнитной индукции Фарадея:

$$\mathcal{E}_{AFEB} = \frac{d(B \cdot 3a^2)}{dt} = 3ka^2, \quad \mathcal{E}_{AGDB} = 2ka^2. \quad (8).$$

Обозначим $\frac{ka^2}{r} = I_0$. Тогда решая систему уравнений (6), (7), (8), получим:

$$I_1 = \frac{9}{23}I_0, \quad I_2 = \frac{8}{23}I_0, \quad I_3 = \frac{1}{23}I_0.$$

Отсюда и из условия $k > 0$ получаем, что ток I_1 на участке АВ течёт от В к А. Рассмотрим контур АНСВ.

$$I_0r = ka^2 = \mathcal{E}_{АНСВ} = I_1 \cdot 3r + U_C,$$

здесь U_C — напряжение между верхней и нижней обкладками конденсатора. Следовательно:

$$U_C = -\frac{4}{23}ka^2, \quad \text{откуда} \quad Q = \frac{4}{23}Cka^2,$$

при этом заряд верхней обкладки отрицательный, нижней — положительный.

Тепловая мощность в цепи равна сумме мощностей на всех проводниках:

$$N = 5I_1^2r + 3I_2^2r + I_3^2r = \frac{26k^2a^4}{23r}, \quad \text{откуда} \quad W = N\tau = \frac{26k^2a^4}{23r}\tau.$$

Задача 3. Восстановление линзы

Предположим, что стержень с источниками — одна из сторон треугольника (например, АВ), точки A_1 и B_1 — их изображения (рис. 24). Тогда лучи AA_1 и BB_1 пересекаются на середине стороны BB_1 в точке О, которая является центром линзы. Луч, идущий от А через В, преломляется в плоскости линзы и идёт далее через их изображение A_1 и B_1 . Тогда середина АВ точка К принадлежит плоскости линзы. Но в этом случае плоскость линзы ОК пересекает стержень АВ, что невозможно. Следовательно, центр треугольника — один из концов стержня.

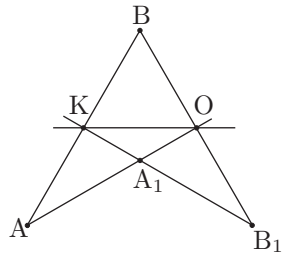


Рис. 24

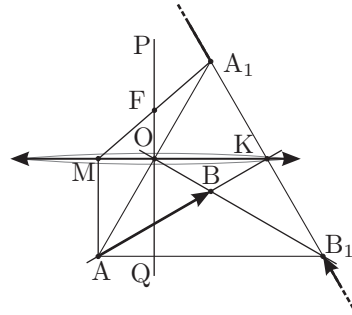


Рис. 25

Рассмотрим этот вариант. Прямые AB и A_1B_1 пересекаются на середине A_1B_1 в точке K , принадлежащей плоскости линзы (рис. 25). Итак, OK — плоскость линзы, точка O — её центр. Прямая PQ , проходящая через точку O перпендикулярно OK — главная оптическая ось. Точки A_1 и B_1 — концы изображения. Само изображение «разорвано» и представляет два луча, лежащие на прямой A_1B_1 , уходящие из точек A_1 и B_1 на бесконечность.

Линза — собирающая, только такая линза может давать «разорванное» изображение.

Определить положение фокусов и фокусное расстояние несложно. Пусть луч AM из точки A параллельно оси линзы PQ до пересечения с плоскостью линзы в точке M . После преломления луч пойдёт через изображение A_1 . Пересечение MA_1 с PQ — точка F и есть главный фокус линзы. Так как OK — средняя линия треугольника, а точка O — середина AA_1 , $OF = \frac{1}{4}h$, где h — высота треугольника, $h = \frac{3}{2}AB = \frac{3}{2}l$. Таким образом, фокусное расстояние $OF = \frac{3}{8}l$.

Задача 4. Давление газировки

При увеличении температуры в объёме V между поверхностью воды и крышкой увеличивается давление газа. Это происходит из-за уменьшения растворимости углекислого газа и его выхода из жидкости. В предельном случае при максимальной температуре t_2 внутри бутылки должно оказаться максимально допустимое давление p_2 .

Найдём массу углекислого газа, которая дополнительно окажется в объёме V при повышении температуры с t_1 до t_2 . Для этого определим растворимости углекислого газа при этих температурах, воспользовавшись графиком и законом Генри:

$$\sigma_1 = \sigma'_1 \frac{p_1}{p_0} \approx 4,50 \text{ г/кг}, \quad \sigma_2 = \sigma'_2 \frac{p_2}{p_0} \approx 4,07 \text{ г/кг},$$

где $\sigma'_1 = 3 \text{ г/кг}$ и $\sigma'_2 = 1,1 \text{ г/кг}$ — растворимости при температурах t_1 и t_2 при атмосферном давлении, найденные из графика. Таким образом, из-за роста температуры в объёме V масса углекислого газа увеличилась на $\Delta m = (\sigma_1 - \sigma_2)m_B = 0,86 \text{ г}$.

Если учесть ещё массу m_1 углекислого газа, который находился над поверхностью вода при герметизации бутылки, то выражение для общей массы углекислого газа будет таким:

$$m_2 = m_1 + \Delta m = \frac{p_1 V \mu}{RT_1} + \Delta m.$$

Давление этого газа в критическом случае равно p_2 :

$$p_2 V = \frac{m_2}{\mu} RT_2 = p_1 V \frac{T_2}{T_1} + \frac{\Delta m}{\mu} RT_2.$$

Таким образом, минимальный надводный объём бутылки:

$$V = \frac{\Delta m}{\mu} \frac{RT_1 T_2}{p_2 T_1 - p_1 T_2} \approx 250 \text{ см}^3.$$

Объём V складывается из верхнего цилиндрического объёма $V_1 = \pi d^2(H - h)/4 \approx 21,2 \text{ см}^3$ и нижнего конического (усечённый конус) V_2 (рис. 26). Для расчётов удобно разбить объём фигуры по-другому: объём V_K конуса и объём V_0 , оставшийся от цилиндра после изъятия конуса (на рисунке заштрихован):

$$V_0 = 21,2 \text{ см}^3 - \pi d^2(H - h)/12 \approx 14,1 \text{ см}^3.$$

Итак,

$$V = 14,1 \text{ см}^3 + \frac{\pi y^3}{12} \approx 250 \text{ см}^3, \quad \text{откуда} \quad y \approx 10 \text{ см}.$$

Наконец, допустимый уровень жидкости:

$$x = H - y \approx 20 \text{ см}.$$

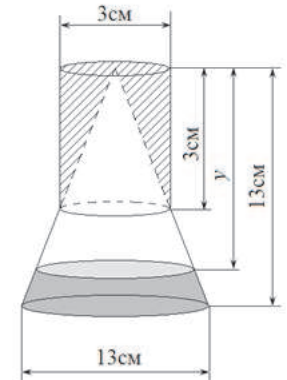


Рис. 26

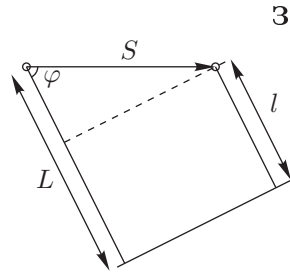


Рис. 27

Задача 5. Неисправная ракета

Если источник звука движется, то частота звука, которую слышит неподвижный наблюдатель, может отличаться от испускаемой частоты. Этот эффект называется эффектом Доплера. Выведем формулу эффекта Доплера для неподвижного наблюдателя и движущегося источника.

За период волны T источник сместится на расстояние $S = vT$, а фронт волны приблизится к наблюдателю на расстояние $L = cT$ (рис. 27). Таким образом, расстояние между фронтами в направлении к наблюдателю составит $l = L - S \cos \varphi = (c - v \cos \varphi)T$, а частота:

$$f = \frac{c}{l} = \frac{c}{(c - v \cos \varphi)T} = \frac{f_0}{1 - (v/c) \cos \varphi}. \quad (1)$$

1. Если ракета летит прямо на датчик, то $\varphi = 0$:

$$f_{\max} = \frac{f_0}{1 - v/c},$$

и частота звука повышается.

2. При произвольном угле φ :

$$f = \frac{f_0}{1 - (v/c) \cos \varphi}.$$

Частота $f > f_0$, если проекция скорости ракеты на направление на датчик положительная ($\cos \varphi > 0$), и $f < f_0$ в обратном случае. Если угол $\varphi = \pi/2$, то $f = f_0$.

3. Существуют два принципиальных положения датчика: внутри круга, описываемого ракетой, и снаружи него¹. Рассмотрим ситуацию, когда датчик находится снаружи.

В этом случае точки, из которых от ракеты приходят максимальная и минимальная частоты, являются концами (M_1 и M_2 соответственно) отрезков касания из положения датчика A к траектории ракеты (рис. 28). А так как в силу симметрии $AM_1 = AM_2$, то задержки между испусканием и приёмом звука для точек M_1 и M_2 одинаковы. Это означает, что точки M_1 и M_2 делят длину окружности в том же отношении, что и точки максимума и минимума на графике частоты делят период сигнала. Максимальная частота $f_{\max}^{\text{out}} = f_{\max}$.

¹Вообще говоря, датчик может находиться на траектории окружности, но в этом случае в момент пролетания ракеты над датчиком должен наблюдаться резкий скачок частоты, чего нет на графиках.

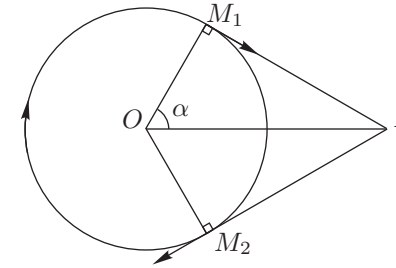


Рис. 28

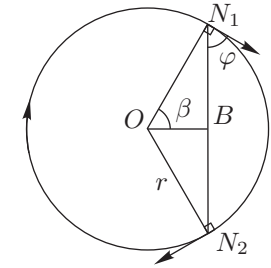


Рис. 29

Если датчик находится внутри траектории (рис. 29), то угол φ между скоростью ракеты и направлением на датчик уже не сможет принимать значения 0 и π как в предыдущем случае. Чтобы найти его наибольшее и наименьшее значения, рассмотрим треугольник OBN_1 . В нём $ON_1 = r$ — радиус траектории, $OB = b$ — расстояние от центра траектории до датчика, $\angle ON_1B = \theta = \pi/2 - \varphi$, $\angle OBN_1 = \gamma$. Заметим, что угол θ при любом положении точки N_1 является острым, и по теореме синусов его синус равен:

$$\sin \theta = \frac{b}{r} \sin \gamma.$$

Так как $b < r$, то $\sin \theta$ принимает наибольшее значение, когда $\sin \gamma = 1$, то есть $\gamma = \pi/2$. А поскольку $|\cos \varphi| = |\sin \theta|$, то $\cos \varphi$ принимает наибольшее и наименьшее значения в точках N_1 и N_2 — концах хорды с центром в B .

Опять-таки в силу симметрии и равенства $BN_1 = BN_2$, точки N_1 и N_2 делят длину окружности в том же отношении, что и точки максимума и минимума на графике частоты делят период сигнала.

При этом максимальная частота:

$$f_{\max}^{\text{in}} = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi} = \frac{f_0}{1 - \frac{vb}{cr}} < f_{\max}.$$

Обратимся теперь к графику и заметим, что для обоих датчиков время от максимума до минимума частоты равны: $t_1 = t_2 = T/4 = 6$ с, где $T = 24$ с — период сигнала (период вращения ракеты). Таким образом, в обоих случаях $2\alpha = 2\beta = \pi/2$. А так как при этом максимальная частота для датчика 1 больше максимальной частоты для датчика 2, то это возможно только, когда датчик 1 находится снаружи траектории, а датчик 2 — внутри.

Рассмотрим график 1:

$$f_{\max}^{\text{out}} = \frac{f_0}{1 - v/c} = 1,32 \text{ кГц}, \quad f_{\min}^{\text{out}} = \frac{f_0}{1 + v/c} = 0,88 \text{ кГц},$$

откуда найдём частоту $f_0 = 1,056$ кГц и скорость ракеты $v = c/5 = 66$ м/с.

Зная период $T = 24$ с и скорость ракеты v , определим радиус её траектории:

$$r = \frac{vT}{2\pi} = 252 \text{ м.}$$

Теперь можно найти расстояния от центра траектории до датчиков:

$$a = \frac{r}{\cos \alpha} = \sqrt{2}r = 357 \text{ м}, \quad b = r \cos \beta = r/\sqrt{2} = 178 \text{ м.}$$

Осталось найти угол ψ между OA и OB , который приводит к тому, что между максимумами графиков образуется фазовый сдвиг $\tau = T/3 = 8$ с. Однако, надо учитывать, что так как $a \neq b$, то в этот сдвиг входит разница во времени распространения сигнала от ракеты до датчиков. Таким образом:

$$\psi = \frac{\tau}{T} + \frac{AM_1}{c} - \frac{BN_1}{c} = \frac{2\pi}{3} + \frac{2 - \sqrt{2}}{10} = 2,15 \text{ рад.}$$

Отметим, что вклад от разницы задержек сигналов составляет около 3%, что является погрешностью того же порядка, что и погрешность определения времён по графику.

Окончательно найдём расстояние между датчиками по теореме косинусов:

$$L = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \psi} = 478 \text{ м.}$$