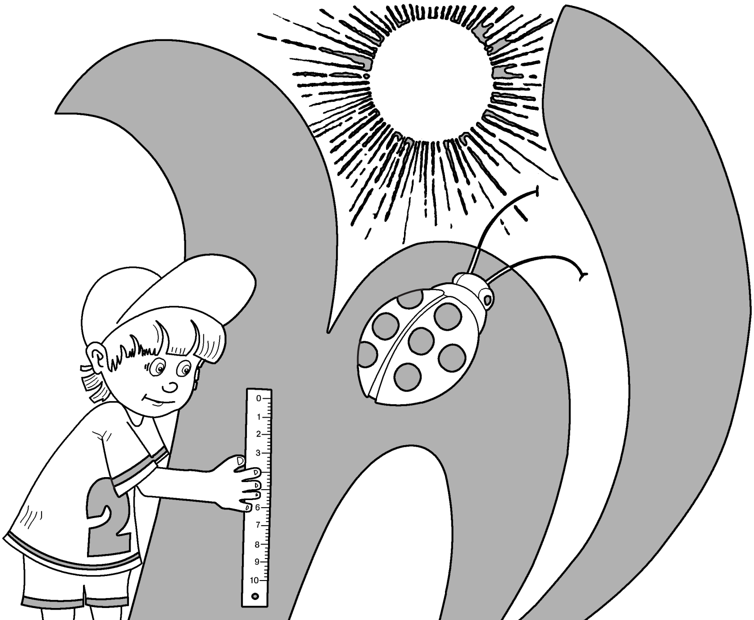
Методическая комиссия по физике
при центральном оргкомитете
Всероссийских олимпиад школьников

L Всероссийская олимпиада школьников по физике

Заключительный этап

Теоретический тур

Методическое пособие



Сочи, 2016 г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике
при центральном оргкомитете Всероссийских олимпиад школьников
Телефоны: (495) 408-80-77, 408-86-95.
E-mail: **physolymp@gmail.com**
Сайт физических олимпиад школьников: `physolymp.ru`

Авторы задач

9 класс

1. Муравьёв В.
2. Замятнин М.
3. Гордеев З.
4. Бычков А., Замятнин М.
5. Замятнин М.

10 класс

1. Бычков А.
2. Воробьёв И.
3. Шеронов А.
4. Аполонский А.
5. Шеронов А.

11 класс

1. Мейлихов Е., Гуденко А.
2. Слободянин В.
3. Аполонский А.
4. Замятнин М.
5. Варламов С.

Общая редакция — Слободянин В.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система $\LaTeX\,2_\varepsilon$.

141700, Московская область, г. Долгопрудный
Московский физико-технический институт

9 класс

Задача 1. Камни в колёсах

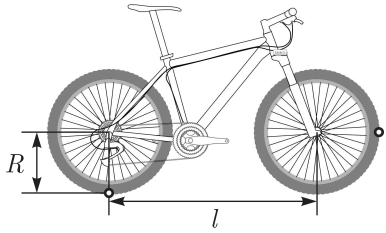


Рис. 1

Колёса велосипеда имеют одинаковый радиус R, а расстояние между центрами колёс $l = 3R$. В протекторе покрышек переднего и заднего колёс застряли два маленьких камня. В начальный момент камень на заднем колесе касается земли, а камень на переднем колесе находится в крайнем переднем положении (рис. 1). Велосипед едет прямолинейно со скоростью v, колёса не скользят по дороге, камни не отрываются от покрышек.

1. Найдите максимальное $L_{\max}$ и минимальное $L_{\min}$ расстояния между камнями в процессе движения велосипеда.

2. Через какое минимальное время t после начала движения расстояние между камнями достигает максимального значения?

Задача 2. Неожиданный поворот

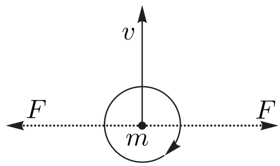


Рис. 2

На частицу массой m, имеющую скорость v, начинает действовать постоянная по модулю сила F, вектор которой за время действия τ поворачивается с постоянной угловой скоростью на угол 180° (рис. 2). Векторы скорости частицы и силы всё время находятся в плоскости рисунка. В начальный момент угол между силой F и скоростью частицы составлял 90°. Определите модуль и направление конечной скорости частицы u через время τ после начала действия силы F. Влиянием других сил можно пренебречь.

Задача 3. Перемещение скамейки

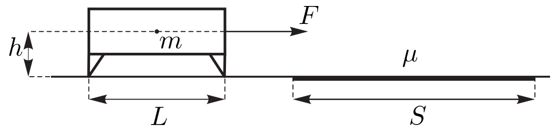


Рис. 3

Скамейку, имеющую массу m и длину L, перемещают горизонтальной силой F (неизвестной и не обязательно постоянной величины) с постоянной скоростью по гладкой горизонтальной поверхности через шероховатую область шириной S ($S > L$). Сила F приложена на уровне центра тяжести на высоте h над поверхностью (рис. 3). Коэффициент трения между опорами скамейки и шероховатой областью μ. Полагая, что опоры не отрываются от горизонтальной поверхности, определите работу силы F при перемещении скамейки через шероховатую область. При каком соотношении параметров L, μ и h возможно такое движение?

Скамейку считайте однородной, а её опоры лёгкими.

Задача 4. Кофе с молоком

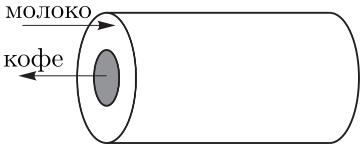


Рис. 4

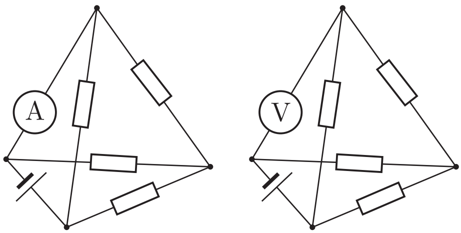
Теплообменник состоит из двух тонких коаксиальных труб и имеет длину $L = 5$ м. По внутренней трубе течёт кофе, а по внешней во встречном направлении — молоко (рис. 4). Молоко поступает в теплообменник при температуре $t_1 = 10\,^\circ$C, а кофе — с противоположной стороны при температуре $t_2 = 90\,^\circ$C. Если в единицу времени по трубам теплообменника в каждую сторону протекает одинаковая масса жидкостей μ, то к выходу из него молоко успевает нагреться до температуры $t_3 = 60\,^\circ$C.

1. Определите температуру t_4 кофе на выходе из теплообменника.
2. На каком расстоянии s друг от друга находятся участки труб, в которых температуры кофе и молока одинаковы?
3. Какими станут температуры молока t_3' и кофе t_4', вытекающих из теплообменника, если увеличить скорость обоих потоков в два раза, сохранив их температуры на входе?

Указание: Мощность теплопередачи через небольшую площадку внутренней трубы пропорциональна разности температур контактирующих с ней жидкостей. Теплообменом с окружающей средой можно пренебречь. Плотности и удельные теплоёмкости кофе и молока считать одинаковыми.

Задача 5. Тетраэдр с прибором

Электрическая цепь в форме тетраэдра содержит четыре одинаковых резистора, идеальный источник постоянного напряжения и идеальный амперметр, который показывает силу тока $I = 2$ А (рис. 5а). Если заменить амперметр идеальным вольтметром, он покажет напряжение $U = 12$ В (рис. 5б). Определите напряжение U_0 источника и сопротивление R одного резистора.



а б

Рис. 5

10 класс

Задача 1. Сферическая горка

Над горизонтальной поверхностью выступает сферическая горка, профиль которой представляет собой четверть окружности радиуса R. В верхнюю точку горки положили небольшую шайбу массой m и сообщили ей горизонтальную начальную скорость v_0 (рис. 6). Коэффициент трения между горкой и шайбой зависит от угла α по закону $\mu = \operatorname{tg}\alpha$.

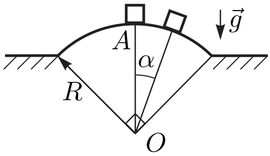


Рис. 6

1. Через какое время τ тело достигнет горизонтальной поверхности при спуске без отрыва от горки?
2. Чему равна работа $A_{тр}$ силы трения к этому моменту?
3. При каких величинах v_0 шайба не оторвётся от поверхности горки?

Задача 2. Гранулы

В трубе сечения S течёт взвесь — жидкость, переносящая с собой мелкие сжимаемые гранулы (рис. 7). На участке с давлением p объём отдельной гранулы V, а на участке с пониженным давлением $p - \Delta p$ объём гранулы $V + \Delta V$. Число гранул, проходящих за единицу времени через любое сечение трубы, равно ν. Найдите массу взвеси μ, проходящую через трубу за единицу времени при стационарном течении, если трения со стенками трубы нет, а скорость жидкости и гранул по всему сечению одинакова. Изменением плотности жидкости пренебречь.

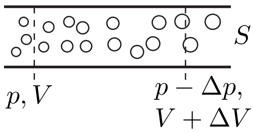


Рис. 7

Задача 3. Вода и лёд

Как известно, при атмосферном давлении вода начинает замерзать, а лёд таять при температуре $t_0 = 0\,°$C. При давлениях, больших атмосферного, вода может находиться в жидкой фазе и при более низких температурах. Увеличение давления на 133 атм понижает температуру плавления льда на 1 °C. В начальном состоянии вода массой $m_0 = 1$ кг и очень малое количество льда находятся в равновесии в адиабатической оболочке под давлением $p_1 = 200$ атм. В адиабатическом процессе давление медленно уменьшают до атмосферного $p_0 = 1$ атм.

1. Найдите изменение массы льда $\Delta m_л$.
2. Найдите изменение объёма системы вода + лёд.
3. Какую работу совершает система против внешнего давления при его уменьшении от p_1 до p_0?

Удельная теплоёмкость воды $c_в = 4{,}2$ Дж/г, льда $c_л = 2{,}1$ Дж/г. Удельная теплота плавления льда $q = 336$ Дж/г. Плотности воды и льда при атмосферном давлении: $\rho_в = 1$ г/см^3, $\rho_л = 0{,}9$ г/см^3.

Сжимаемость воды $G = -\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta P} = 5\cdot 10^{-10}$ Па$^{-1}$, сжимаемость льда меньше сжимаемости воды.

Задача 4. Диодная цепочка

Электрическая цепь (рис. 8) состоит из 2016 звеньев, состоящих из одинаковых диодов и резисторов. Вольтамперная характеристика диода приведена на рис. 9, напряжение $U_d = 1$ В. Сопротивление каждого резистора $R = 1$ Ом. На вход схемы подаётся постоянное напряжение U_0.

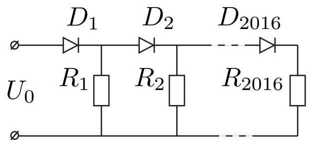


Рис. 8

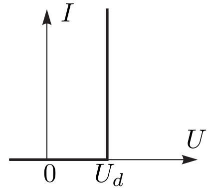


Рис. 9

1. Определите силы токов через диоды и через резисторы при входном напряжении $U_0 = 4{,}4$ В.
2. Постройте вольтамперную характеристику схемы (зависимость тока I_0 от U_0) в диапазоне от 0 В до 3 В.
3. Определите входное напряжение U_0, при котором ток через цепь равен $I_0 = 14$ А.

Задача 5. Déjà vu

В электрической цепи (рис. 10) все элементы можно считать идеальными. Вначале конденсатор ёмкостью C не заряжен. Ключ K замыкают, а затем, когда скорость изменения энергии в конденсаторе достигает максимума — размыкают.

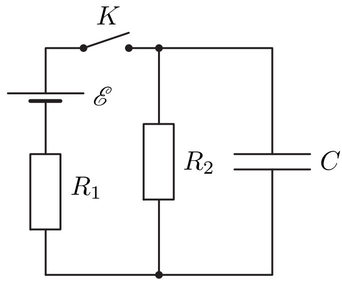


Рис. 10

1. Найдите мощность N, которую развил источник постоянного напряжения к моменту размыкания ключа.
2. Пусть сопротивления резисторов равны $R_1 = R_2 = R$. В этом случае скорость изменения энергии в конденсаторе достигает максимума через время $t_0 = CR\ln\sqrt{2}$ (это время можно найти, решая соответствующее дифференциальное уравнение, которое вам решать не нужно). Определите количество теплоты Q, которое выделится в цепи при замкнутом ключе K.

11 класс

Задача 1. Фрикционная передача

Длинный цилиндрический валик радиуса R_0, вращающийся вокруг своей оси с угловой скоростью ω_0, прижимают к свободно (без трения в оси) вращающемуся на оси диску радиуса R. Линия касания диска и валика совпадает с радиусом диска (рис. 11).

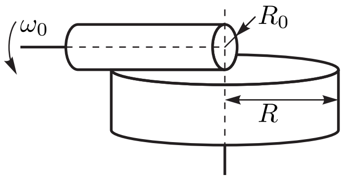


Рис. 11

1. Найдите установившуюся угловую скорость ω_μ вращения диска, если трение между валиком и диском сухое.

2. Найдите установившуюся угловую скорость ω_η вращения диска, если трение вязкое. Считайте, что величина силы вязкого трения, приходящаяся на единицу длины соприкосновения, пропорциональна относительной скорости движения соприкасающихся поверхностей валика и диска.

3. Определите отношение $k = \omega_\eta/\omega_\mu$.

Задача 2. Круговой процесс

Над молем идеального многоатомного газа проводят круговой процесс, который, будучи изображённым на p,V-диаграмме, при некотором масштабе имеет вид окружности. Центр окружности имеет координаты (p_0,V_0), диаметр вдоль оси давлений равен $2\Delta p$, а диаметр вдоль оси объёмов $2\Delta V$.

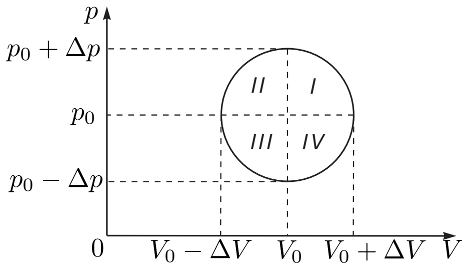


Рис. 12

1. Найдите все пары диаметрально противоположных точек окружности, в которых теплоёмкости одинаковы. Вычислите эти теплоёмкости.

2. Сравните теплоёмкости двух произвольных диаметрально противоположных точек, лежащих во 2 и 4 квадрантах окружности (рис. 12), другими словами, определите, в какой из этих точек теплоёмкость больше и почему.

Примечание. Считайте, что теплоёмкость газа при постоянном объёме не зависит от T.

Задача 3. Звезда переменного тока

Три элемента, среди которых могут быть резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности, соединены звездой (рис. 13). При подключении источника переменного напряжения к выводам 1 и 2 цепи вольтметр переменного тока, подключенный к выводам 1 и 3, показывает 80 В. При подключении вольтметра к выводам 2 и 3 он показывает 45 В. При подключении того же источника к выводам 1 и 3 вольтметр показывает 21 В между выводами 2 и 3 и 28 В между 1 и 2. При подключении

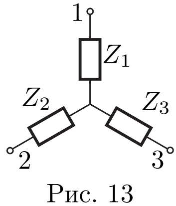


Рис. 13

источника к выводам 2 и 3 вольтметр показывает 21 В между 1 и 2 и 28 В между 1 и 3.

1. Определите напряжение источника.
2. Определите элементы цепи, соответствующие лучам звезды. Можно ли однозначно установить тип элементов цепи?
3. Определите отношение силы токов $I_{12} : I_{13} : I_{23}$ через источник при его подключении к выводам 1 и 2, 1 и 3, 2 и 3.

Источник, вольтметр и все элементы цепи можно считать идеальными.

Задача 4. МГД-насос

Магнитогидродинамический (МГД) насос представляет собой плоский конденсатор с размерами пластин $h \times a$ и расстоянием между ними b ($h \gg b$, $a \gg b$). С боковых торцов конденсатор ограничен непроводящими стенками. К пластинам конденсатора подключен идеальный источник с напряжением U (полярность указана на рисунке 14). Между пластинами конденсатора создано однородное магнитное поле с индукцией B, вектор которой горизонтален и параллелен проводящим пластинам. Нижними краями конденсатор касается поверхности слабопроводящей жидкости с плотностью ρ_0 и удельным сопротивлением λ. Сверху к конденсатору герметично присоединён непроводящий кожух. Посередине конденсатора на высоте $h/2$ на тонкой нити подвешен небольшой непроводящий шарик, имеющий объём V и плотность $\rho > \rho_0$. Определите зависимость силы $T(U)$ натяжения нити от напряжения на источнике. Постройте качественный график этой зависимости, указав на нём характерные точки. Сверху кожух и поверхность проводящей жидкости сообщаются с атмосферой.

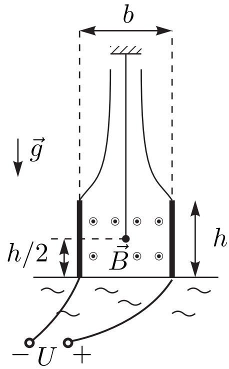


Рис. 14

Задача 5. Солнечный парус

Солнечный парус представляет собой плоское зеркало массой $m = 1{,}660$ г площадью $S = 1{,}000$ м^2 Парус ориентирован перпендикулярно солнечным лучам и движется вдоль линии, проходящей через центр Солнца и центр зеркала. В начальный момент времени оно находится на расстоянии $R_0 = 1$ а. е. от Солнца. На каком расстоянии R_1 от Солнца будет парус через $t_1 = 1$ час полёта, если он двигался с постоянной, но неизвестной скоростью $v \ll c$?

Одна астрономическая единица равна расстоянию от Земли до Солнца $R_0 = 150{,}0 \cdot 10^6$ км $= 1$ а. е. Импульс фотона p и его энергия E связаны соотношением $pc = E$, где $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ м/с — скорость света. Поток испускаемых протонов, нейтронов и других частиц, исходящих от Солнца, не учитывать. Солнечная постоянная $W_0 = 1{,}367$ кВт/м^2 — суммарный поток солнечного излучения, проходящий за единицу времени через единичную площадку, ориентированную перпендикулярно потоку, на расстоянии 1 а. е. от Солнца.

Примечание. Знаете ли вы, что продолжительность года равна $\pi \cdot 10^7$ с с точностью полпроцента?

Возможные решения

9 класс

Задача 1. Камни в колёсах

Поскольку колёса имеют одинаковые размеры и не проскальзывают, они вращаются с одинаковыми угловыми скоростями $\omega = v/R$. Поэтому угол между радиус-векторами камней $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ относительно центров колёс в любой момент времени составляет $90°$ (рис. 15).

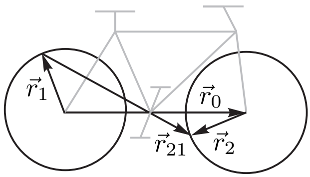


Рис. 15

Радиус-вектор $\vec{r}_{21}$ второго камня относительно первого можно найти из векторного равенства

$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_0 + \vec{r}_2 - \vec{r}_1,$$

где $\vec{r}_0$ — радиус-вектор центра переднего колеса относительно центра заднего. Так как угол между векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ всегда равен $90°$, то вектор $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ имеет длину $\sqrt{2}R$ и вращается с постоянной угловой скоростью, равной угловой скорости колёс. Таким образом, радиус-вектор второго камня относительно первого можно найти как сумму вектора $\vec{r}_0$ (который не меняется в процессе движения велосипеда) и вектора, имеющего длину $\sqrt{2}R$ и вращающегося с угловой скоростью ω. Сложение этих векторов показано на рисунке 16, причём концы векторов $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ и $\vec{r}_{21}$ лежат на окружности радиуса $\sqrt{2}R$ с центром в конце вектора $\vec{r}_0$.

Из рисунка 16 следует, что вектор $\vec{r}_{21}$ имеет минимальную длину в тот момент времени, когда вектор $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ направлен противоположно вектору $\vec{r}_0$, максимальную — когда вектор $\vec{r_2} - \vec{r_1}$ направлен так же, как и вектор $\vec{r}_0$. Поэтому

$$r_{21}^{\min} = 3R - \sqrt{2}R = R(3 - \sqrt{2});$$
$$r_{21}^{\max} = 3R + \sqrt{2}R = R(3 + \sqrt{2}).$$

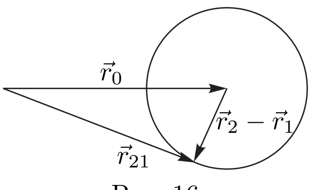


Рис. 16

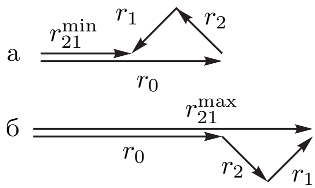


Рис. 17

Эти два случая показаны на рис. 17 а и б, соответственно. Длина вектора $\vec{r}_{21}$ будет максимальна, когда вектор $\vec{r}_2$ повернётся на угол $\pi/4$ по сравнению с начальным положением. Отсюда находим момент времени t, когда расстояние между камнями достигает максимального значения:

$$t = \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\pi R}{4v}.$$

Задача 2. Неожиданный поворот

Пусть, для определённости, вектор силы в начальный момент направлен вправо.

Рассмотрим изменение скорости частицы за малые интервалы времени Δt. Для этого удобно воспользоваться геометрической интерпретацией векторного уравнения для изменения импульса $m(\vec{u} - \vec{v}) = \sum \vec{F}_i \Delta t$, где $\vec{F}_i$ — вектор силы F в произвольный момент времени.

Из рисунка видно, что суммарное изменение импульса частицы $\Delta\vec{p}$ направлено против её начальной скорости (изменения импульса в направлении перпендикулярном начальной скорости компенсируются за время поворота силы на $180°$).

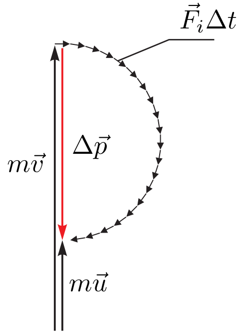


Рис. 18

Длина половины дуги окружности, образованной модулями изменения импульса точки, равна $\sum F\Delta t = F\sum \Delta t = F\tau$, где τ — время поворота вектора силы. Через длину дуги можно найти диаметр окружности $\Delta p = \dfrac{2F\tau}{\pi}$. Откуда $u = v - \dfrac{2F\tau}{m\pi}$.

Направление u совпадает с v при $v > \dfrac{2F\tau}{m\pi}$, в ином случае направление становится противоположным.

Заметим, что условию не противоречит и второй возможный вариант, в котором вектор силы изначально направлен влево. Тогда изменение скорости совпадает с направлением v и $u = v + \dfrac{2F\tau}{m\pi}$. В этом случае u всегда сонаправлена с v.

Задача 3. Перемещение скамейки

Найдём силу необходимую для поддержания равномерного движения скамейки с заехавшей на шероховатую область передней опорой. Для этого запишем правило моментов относительно точки O из сопутствующей ИСО, в которой скамейка покоится: $\mu N_1 h + mg\dfrac{L}{2} = N_1 L$,

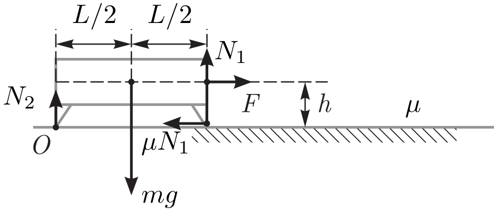


Рис. 19

здесь учтено, что $F_1 = \mu N_1$. Откуда $F_1 = \dfrac{\mu mgL}{2(L - \mu h)}$.

В случае, когда на шероховатую область заехали обе опоры, необходимо прикладывать силу $F_2 = \mu mg$. При движении по шероховатой поверхности только задней опоры, по аналогии с первым случаем, определяется сила $F_3 = \frac{\mu mgL}{2(L+\mu h)}$. Полную работу по перемещению скамейки можно представить в виде суммы работ на трёх участках:

$$A = F_1L + F_2(S-L) + F_3L = \mu mg\left[\frac{L^3}{L^2-\mu^2h^2} + S - L\right] = \mu mg\left[\frac{\mu^2h^2L}{L^2-\mu^2h^2} + S.\right]$$

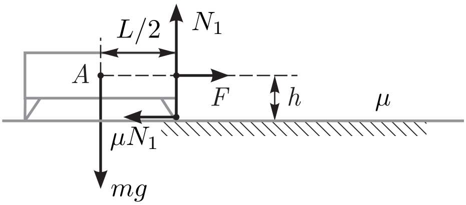


Рис. 20

Важно учесть ОДЗ для полученного ответа. На первый взгляд необходимо выполнение условия $L > \mu h$, но это не так. Существует более жёсткое и неявное ограничение. Наш ответ был получен в предположении сохранения контакта с поверхностью обеими опорами. Найдём, при каком соотношении величин начнётся опрокидывание скамейки относительно передней ножки. На грани опрокидывания сила N_2 исчезнет, а N_1 станет равна mg. Тогда из правила моментов относительно точки A получим: $\mu hN_1 = \frac{L}{2}N_1$, то есть сохранение контакта возможно лишь при $L > 2\mu h$.

Задача 4. Кофе с молоком

В установившемся режиме температура вдоль трубы меняется линейно. Это можно показать, рассмотрев изменение температуры на небольшом смещении вдоль трубы. Из уравнения теплового баланса следует, что изменения температур жидкостей одинаковы (здесь учтено, что за одинаковое время обмениваются теплом одинаковые массы жидкостей). Другими словами, если в некоторой месте теплообменника температуры кофе и молока равны $t_к$ и $t_м$ соответственно, то на небольшом расстоянии Δx они станут равны $t_к + \Delta t$ и $t_м + \Delta t$, при этом сохранится разность температур и мощность теплообмена. Пошагово можно повторять эту процедуру до другого края теплообменника. Распределение температур вдоль труб приведено на графике (рис. 21):

$$\Delta t_1 = t_3 - t_1 = 50\,^\circ\text{C}.$$

Так как изменения температур равны, то температура кофе на выходе

$$t_4 = t_2 - \Delta t_1 = 40\,^\circ\text{C}.$$

Расстояние s между участками труб с одинаковыми температурами можно найти из подобия треугольников:

$$\frac{s}{L} = \frac{t_2 - \Delta t_1 - t_1}{\Delta t_1}, \qquad \text{откуда} \qquad s = 3\text{ м}.$$

Свяжем мощности переданного и полученного тепла:

$$\mu c \Delta t_1 = \alpha(t_2 - \Delta t_1 - t_1),$$

где α — некоторая константа, связанная с теплопроводящими свойствами внутренней трубы и жидкостей. После изменения расхода жидкостей до $\mu' = 2\mu$ уравнение связи примет вид

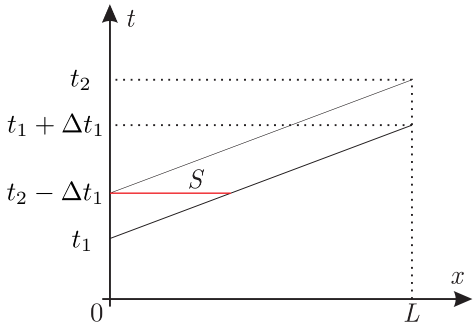


Рис. 21

$$2\mu c \Delta t_1' = \alpha(t_2 - \Delta t_1' - t_1).$$

Здесь учтено, что мощность изменится из-за уменьшения разности температур. Решая систему уравнений относительно нового изменения температур $\Delta t_1'$, получим $\Delta t_1' = 36{,}4\,°\mathrm{C}$. Откуда температура на выходе у молока $t_3' = 46{,}4\,°\mathrm{C}$, у кофе $t_4' = 53{,}6\,°\mathrm{C}$.

Задача 5. Тетраэдр с прибором

Для тетраэдра с амперметром обозначим узлы и нарисуем эквивалентную схему с учётом равенства нулю сопротивления амперметра. Расставим в эквивалентной схеме токи с учётом закона Ома обратно-пропорционально сопротивлениям параллельных ветвей и с учётом закона сохранения заряда для узлов. Затем отметим найденные токи на исходной схеме.

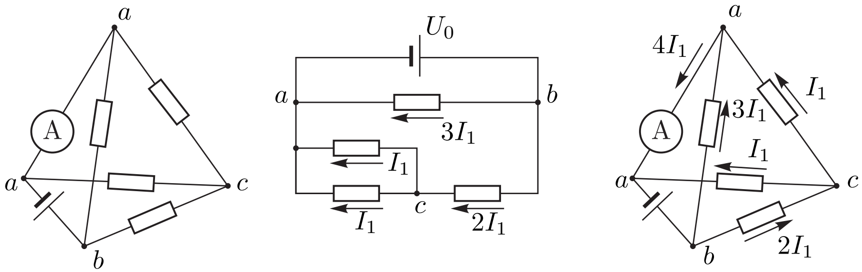


Рис. 22

Для ветви ab запишем $U_0 = 3I_1R$, откуда ток через амперметр

$$I_A = 4I_1 = \frac{4U_0}{3R}.$$

Повторим вышеперечисленные действия с тетраэдром, содержащим вольтметр, имеющий бесконечно большое сопротивление.

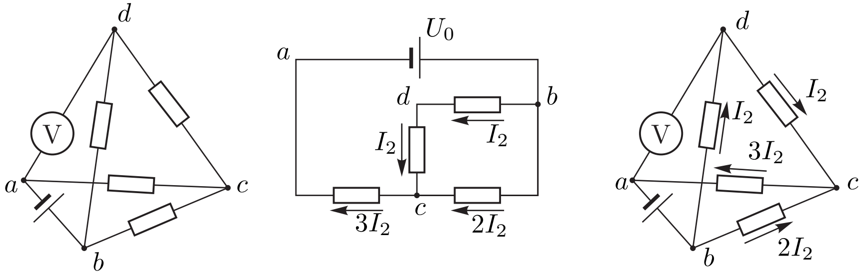


Рис. 23

Напряжение между узлами ab равно $U_0 = 3I_2R + 2I_2R$, откуда показания вольтметра $U = 4I_2R = (4/5)U_0$. Выражая искомые величины, получим:

$$U_0 = \frac{5}{4}U = 15\text{ В} \qquad \text{и} \qquad R = \frac{5}{3}\frac{U}{I_A} = 10\text{ Ом}.$$

10 класс

Задача 1. Сферическая горка

При произвольном угле α на шайбу действует сила нормального давления N и сила трения:

$$F_{\text{тр}} = \mu N = N \operatorname{tg}\alpha.$$

Вектор силы реакции Q будет направлен к силе N под таким углом, что $\operatorname{tg}\beta = F_{\text{тр}}/N = \operatorname{tg}\alpha$. Откуда $\beta = \alpha$, следовательно, сила реакции Q направлена вертикально. Поэтому горизонтальная составляющая скорости будет постоянной и равной v_0.

1. Время движения:

$$\tau = \frac{R\cos(\pi/4)}{v_0} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{R}{v_0}.$$

2. Скорость шайбы в момент достижения горизонтальной поверхности будет равна $v_1 = \sqrt{2}v_0$. По закону сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgR + A_{\text{тр}} = \frac{mv_1^2}{2} + mgR\cos\frac{\pi}{4}.$$

Окончательно:

$$A_{\text{тр}} = -m\left(gR\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} - \frac{v_0^2}{2}\right).$$

3. Запишем второй закон Ньютона относительно оси, перпендикулярной горке

$$m\frac{(v_0/\cos\alpha)^2}{R} = mg\cos\alpha - N.$$

Отрыв произойдет при $N = 0$, при этом $v_0^2 = gR\cos^3\alpha$. Поскольку $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/4$, то отрыва не будет при $v_0 \leqslant \sqrt{gR/(2\sqrt{2})}$. Заметим, что при этих значениях v_0 работа $A_{\text{тр}}$ всегда отрицательна, как и должно быть для работы диссипативных сил.

Задача 2. Гранулы

Если n_1, n_2 и u_1, u_2 концентрации гранул и скорости течения на указанных в условии участках трубы, то $\nu = n_1u_1S$ и $\nu = n_2u_2S$. Несжимаемость жидкости выражается как постоянство объёмного расхода:

$$u_1S(1 - n_1V) = u_2S\big(1 - n_2(V + \Delta V)\big).$$

Отсюда находится приращение скорости течения между указанными участками $\Delta u = u_2 - u_1 = \nu\Delta V/S$.

Рассмотрим смещение отрезка взвеси между указанными участками за время dt, задняя граница отрезка сместится вправо на u_1dt, а передняя на u_2dt.

В области пересечения картина течения прежняя. От исходного отрезка сзади «отрезается» кусок $u_1 dt$ с массой $dm = \mu dt$, а спереди добавляется кусок $u_2 dt$ с той же массой. Определим суммарную силу, действующую на отрезок взвеси, через изменение импульса:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{dm}{dt}(u_2 - u_1) = \mu(u_2 - u_1) = \Delta pS,$$

$$\text{откуда} \qquad \mu = \frac{\Delta pS}{u_2 - u_1} = \frac{\Delta pS^2}{\nu\Delta V}.$$

Задача 3. Вода и лёд

1. Нахождение температуры при давлении p_1

$$t_1 = -\frac{p_1 - p_0}{133\ \text{атм}/{}^\circ\text{C}} = -1{,}50\,^\circ\text{C}.$$

Уравнение теплового баланса

$$q\Delta m_\text{л} = c_\text{в} m_0(t_0 - t_1).$$

Изменение массы льда

$$\Delta m_\text{л} = \frac{c_\text{в} m_0(t_0 - t_1)}{q} = 18{,}7\ \text{г}.$$

2. Изменение объёма системы происходит за счёт сжимаемости воды (ΔV_1) и за счёт образования льда (ΔV_2). Изменение за счёт сжимаемости

$$\Delta V_1 = GV(p_1 - p_0) = \frac{Gm_0(p_1 - p_0)}{\rho_\text{в}} = 9{,}95\ \text{см}^3 \approx 10{,}0\ \text{см}^3.$$

За счёт образования льда с учетом малости сжимаемости

$$\Delta V_2 = \Delta m_\text{л}\left(\frac{1}{\rho_\text{л}} - \frac{1}{\rho_\text{в}}\right) \approx 2{,}1\ \text{см}^3.$$

Изменение объёма системы

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = 12{,}1\ \text{см}^3.$$

3. Считая, что давление линейно связано с изменением объёма, работа системы равна:

$$A_1 = p_\text{ср}\Delta V = \frac{p_0 + p_1}{2}\Delta V \approx 121\ \text{Дж}.$$

Задача 4. Диодная цепочка

1. При данном $U_0 = 4{,}4$ В открыты только первые 4 диода, поэтому на каждом из «открытых» диодов падает напряжение, равное $U_d = 1$ В. По

самому дальнему от места подключения источника питания резистору течёт ток силой меньше 1 А.

Токи через резисторы равны:

$$I_{R_1} = 3{,}4\ \text{А},\quad I_{R_2} = 2{,}4\ \text{А}\quad I_{R_3} = 1{,}4\ \text{А}\quad I_{R_4} = 0{,}4\ \text{А}.$$

Токи через диоды равны:

$$I_{D_1} = 7{,}6\ \text{А},\quad I_{D_2} = 4{,}2\ \text{А},\quad I_{D_3} = 1{,}8\ \text{А},\quad I_{D_4} = 0{,}4\ \text{А}.$$

2. При напряжении $U_{AB} < 1$ В ток в цепи вообще не течет. При напряжении U_{AB} от 1 В до 2 В ток идет через первый диод и первый резистор. Сила тока в этом случае равна

$$I = \frac{U_{AB} - 1\ В}{1\ \text{Ом}}.$$

В диапазоне от 2 В до 3 В открыты первый и второй диоды и токи текут по двум резисторам. При каждом увеличении напряжения на 1 В открывается ещё один диод. ВАХ выглядит так, как показано на рисунке (рис. 24).

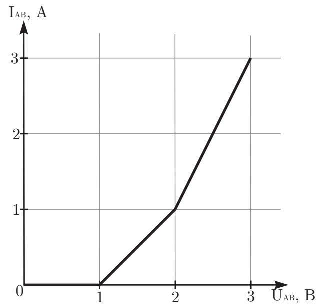


Рис. 24

3. Пусть открыты N диодов и токи текут по N резисторам, причем величина тока, текущего по последнему резистору $I < 1$ А. В этом случае напряжение U_{AB} равно $N \cdot (1\ \text{В}) + I \cdot (1\ \text{Ом})$. Суммарный ток цепи (или ток, текущий через первый диод) находится в результате суммирования:

$$I_N = NI + (1 + 2 + 3 + \cdots + N - 1) \cdot (1\ \text{А}) = NI + \frac{(N-1)N}{2}\ (\text{А}).$$

При максимальном значении величины $I = 1$ А максимальный ток равен:

$$I_{N,\ \max} = \frac{N(N+1)}{2}\ (\text{А}),$$

а при минимальном значении $I = 0$ А минимальный ток равен:

$$I_{N,\ \min} = \frac{N(N-1)}{2}\ (\text{А}).$$

При $N = 5$ максимальное значение $I_{\max} = 15$ А, а минимальное значение равно $I_{\min} = 10$ А. Сила тока 14 А находится в этом промежутке. Следовательно, $N = 5$ и $I = (4\ \text{А})/5 = 0{,}8$ А. Значит, напряжение $U_{AB} = 5{,}8$ В.

Задача 5. Déjà vu

1. Пусть I_C — сила тока, идущего на зарядку конденсатора, а I_R — сила тока, протекающего через резистор R_2, включённый параллельно конденсатору, I — ток через источник, q_R — заряд, протекший через резистор R_2, а q_C —

заряд конденсатора, q — заряд, протекший через источник, U — напряжение на конденсаторе и резисторе R_2. Тогда

$$U = \frac{q}{C} = I_R R_2 = \mathscr{E} - IR_1,$$

откуда находим

$$I = \frac{\mathscr{E} - U}{R_1}, \qquad I_R = \frac{U}{R_2}, \qquad I_C = I - I_R = \frac{\mathscr{E}}{R_1} - U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Зависимость скорости изменения энергии конденсатора от напряжения на нём является квадратным трёхчленом

$$P = U \cdot I_C = U\left[\frac{\mathscr{E}}{R_1} - U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right],$$

максимум которого находится посередине между его корнями

$$U_m = \frac{\mathscr{E}}{2}\frac{R_2}{R_1 + R_2}, \qquad I_m = \frac{\mathscr{E}}{2R_1}.$$

Ток через источник в этот момент

$$I = I_R + I_C = \frac{U_m}{R_2} + I_m = \frac{\mathscr{E}}{2R_1}\frac{2R_1 + R_2}{R_1 + R_2},$$

а искомая мощность источника равна

$$N = \mathscr{E}I = \frac{\mathscr{E}^2}{2R_1}\frac{2R_1 + R_2}{R_1 + R_2}.$$

Запишем второе правило Кирхгофа для контура с резисторами ($R_1 = R_2 = R$)

$$\mathscr{E} = IR_1 + I_R R_2 = (I + I_R)R,$$

домножим это уравнение на Δt

$$\mathscr{E}\Delta t = (I\Delta t + I_R \Delta t)R = (\Delta q + \Delta q_R)R$$

и просуммируем по времени от 0 до t_0:

$$\mathscr{E}t_0 = (q + q_R)R = (2q - q_C)R. \qquad (q_R = q - q_C)$$

Отсюда с учётом

$$q_C = CU_m = \frac{C\mathscr{E}}{2}\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{C\mathscr{E}}{4}$$

находим q

$$q = C\mathscr{E}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\ln 2\right).$$

Из закона сохранения энергии найдем количество теплоты Q, выделившееся в цепи при замкнутом ключе K:

$$Q = \mathscr{E}q - \frac{q_C^2}{2C} = \frac{C\mathscr{E}^2}{4}\left(\frac{3}{8} + \ln 2\right) = 0{,}27C\mathscr{E}^2.$$

11 класс

Задача 1. Фрикционная передача

Трение меняет знак на расстоянии $r_0 = \omega_0 R_0/\omega$ от центра диска. В установившемся режиме полный момент силы трения равен нулю.

В случае сухого трения:

$$\int\limits_0^{r_0} \frac{rF}{R} dr = \int\limits_{r_0}^{R_0} \frac{rF}{R} dr, \qquad \frac{r_0^2}{2} = \frac{R^2 - r_0^2}{2},$$

$$\text{откуда} \qquad r_0 = \frac{R}{\sqrt{2}}, \qquad \omega_\mu = \sqrt{2}\omega_0 \frac{R_0}{R}.$$

В случае вязкого трения момент сил трения:

$$\int\limits_0^R r\beta(\omega r - \omega_0 R_0) dr = 0, \qquad \text{так как } \omega r_0 = \omega_0 R_0, \text{ то}$$

$$\int\limits_0^R r\beta(\omega r - \omega r_0) dr = \beta\omega \int\limits_0^R r(r - r_0) dr = 0,$$

$$\text{откуда} \qquad \frac{R^3}{3} = \frac{R^2 r_0}{2}, \qquad \omega_\eta = \frac{\omega_0 R_0}{r_0} = \frac{3}{2}\omega_0 \frac{R_0}{R}.$$

Отношение скоростей:

$$k = \frac{\omega_\eta}{\omega_\mu} = \frac{3/2}{\sqrt{2}} \approx 1{,}06.$$

Таким образом, установившаяся скорость ω_η вращения в случае вязкого трения на 6 % больше установившейся скорости ω_μ вращения диска при сухом трении.

Задача 2. Круговой процесс

Рассмотрим моль идеального газа. По определению его теплоёмкость:

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU + pdV}{dT}. \tag{1}$$

Для идеального газа:

$$dU = C_V dT \qquad RdT = pdV + Vdp$$

Выразим теплоёмкость:

$$C = C_V + R\frac{pdV}{pdV + Vdp} = C_V + \frac{R}{1 + \dfrac{V}{p}\dfrac{dp}{dV}}$$

В любых диаметрально противоположных точках A и B касательная к окружности имеет один и тот же наклон:

$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_A = \left(\frac{dp}{dV}\right)_B \tag{2}$$

Значит, теплоёмкости могут быть равны либо когда dp/dV обращается в ноль, либо бесконечность, чему соответствует $C = C_p$ и $C = C_V$ соответственно, либо когда:

$$V_A/p_A = V_B/p_B,$$

то есть когда точки A, B и центр окружности лежат на одной прямой, идущей из начала координат. Значит,

$$V_A/p_A = V_0/p_0.$$

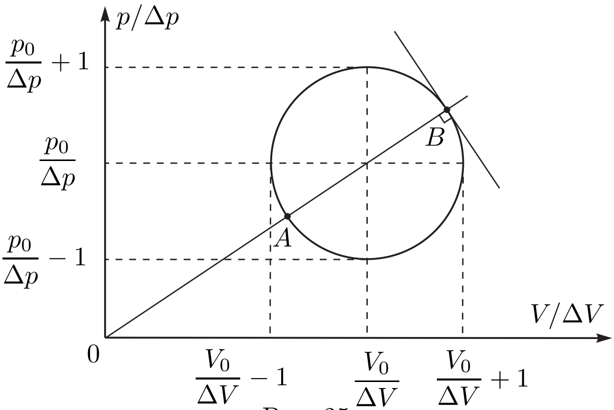


Рис. 25

Перерисуем процесс в безразмерных осях координат (рис. 25). Проведём прямую через точки A и B. Построим касательную к графику в точке B. Она будет перпендикулярна прямой AB. Таким образом, если угловой коэффициент прямой AB равен k, то угловой коэффициент касательной будет равен $k' = -1/k$, следовательно:

$$\frac{dp/\Delta p}{dV/\Delta V} = -\frac{V_0/\Delta V}{p_0/\Delta p}, \qquad \text{откуда} \qquad \frac{dp}{dV} = -\frac{V_0}{p_0}\left(\frac{\Delta p}{\Delta V}\right)^2.$$

Теплоёмкость C равна:

$$C = C_V + \frac{R}{1 - \left(\frac{V_0}{p_0}\right)^2 \left(\frac{\Delta p}{\Delta V}\right)^2}.$$

Если $p_0/V_0 = \Delta p/\Delta V$, то $c = \pm\infty$ — точки касания принадлежат изотермам.

Сравним теплоёмкость в точках C и D, лежащих во 2 и 4 квадрантах соответственно. Поскольку

$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_C = \left(\frac{dp}{dV}\right)_D > 0,$$

то теплоёмкость больше там, где отношение V/p меньше:

$$V_C/p_C < V_D/p_D$$

Получается, в нашем случае $C_C > C_D$.

Задача 3. Звезда переменного тока

При подключении к источнику переменного тока двух последовательно соединенных элементов, напряжения на них складываются как векторы, модуль которых равен напряжению, показываемому вольтметром. Угол между осью абсцисс и этим вектором примем равным $0°$ для резистора, тогда для конденсатора он будет равен $+90°$, а для катушки индуктивности $90°$. Заметим, что суммарное напряжение всегда не превосходит суммы напряжений.

Предположим, что один из элементов 1 и 2 является катушкой индуктивности, а другой — конденсатором. Тогда суммарное напряжение на них составляет $U_{12} = 80$ В $-$ 45 В $= 35$ В, что равно напряжению источника. Заметим, что $21^2 + 28^2 = 35^2$, значит, в силу правила сложения напряжений, элемент 3 является резистором.

При такой схеме различить, какой из элементов 1 и 2 является конденсатором, а какой — катушкой индуктивности, нельзя, так как поменяв их местами и сохранив импедансы, напряжения не изменятся. Рассмотрим все остальные случаи. Суммарное напряжение на элементах 1 и 2 будет определяться либо как сумма напряжений на каждом (в случае, если 1 и 2 — одинаковые элементы), либо как корень из суммы квадратов напряжений на каждом (в случае, если один из них — резистор, а другой — конденсатор или катушка индуктивности). Тогда суммарное напряжение, равное напряжению источника, в любом случае будет больше, чем, по крайней мере, 80 В. Однако, это больше, чем сумма напряжений в случае подключения источника к выводам 1 и 2. Полученное противоречие показывает, что один из этих элементов является конденсатором, а другой — катушкой индуктивности.

Импедансы складываются аналогично напряжениям. Отношение модулей импедансов двух элементов при последовательном соединении равно отношению напряжений на этих элементах, следовательно: $Z_1 : Z_3 = 4 : 3$ (из схемы с подключением источника к выводам 1 и 3), $Z_3 : Z_2 = 4 : 3$ (из схемы с подключением источника к выводам 2 и 3). Пусть $Z_2 = 9$, $Z_3 = 12$, $Z_1 = 16$ относительных единиц. Тогда, пользуясь правилом сложения импедансов, находим: $Z_{12} = 7$, $Z_{13} = 20$, $Z_{23} = 15$. Отношение сил токов обратно пропорционально отношению импедансов, откуда

$$I_{12} : I_{13} : I_{23} = \frac{1}{7} : \frac{1}{20} : \frac{1}{15} = 60 : 21 : 28.$$

Задача 4. МГД-насос

Рассмотрим маленький шарик жидкости объёма V, который попадает в пространство между проводящими пластинами, и силы, которые на него действуют.

Сила тяжести:

$$F_{\text{т}} = \rho_0 g V.$$

В силу того, что плотность тока одинакова в любой точке жидкости между проводящими пластинами (маленький шарик не влияет на распределение тока), на любой элемент жидкости одинакового объёма внутри действует одинаковая сила, тогда на шарик объёма V действует сила:

$$F_{\text{амп}} = \frac{BIb}{abh} \cdot V = \frac{BI}{ah} \cdot V,$$

где $I = \dfrac{Uah}{\lambda b}$. Для того, чтобы жидкость поднялась вверх:

$$F_{\text{амп}} > F_{\text{т}} \qquad \text{откуда} \qquad \frac{BU}{\lambda b} > \rho_0 g \qquad \text{и} \qquad U > U_{\text{кр}} = \frac{\rho_0 g \lambda b}{B}.$$

При $U > U_{\text{кр}}$ на маленький шарик жидкости между пластинами со стороны остальной жидкости действует сила Архимеда $F_{\text{арх}}$, направленная вниз. Поскольку шарик находится в равновесии, то

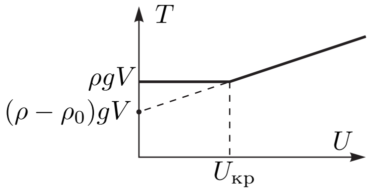


Рис. 26

$$F_{\text{арх}} = F_{\text{амп}} - F_{\text{т}} = \left(-\rho_0 g + \frac{BU}{\lambda b}\right) \cdot V.$$

На непроводящий шарик действует такая же по величине сила Архимеда со стороны жидкости, а также сила натяжения нити $T\,(U)$ и сила тяжести. Тогда в равновесии:

$$T\,(U) = F_{\text{арх}} + \rho g V$$

Отсюда получаем искомую силу натяжения нити при $U > U_{\text{кр}}$:

$$T\,(U) = \rho g V - \left(\rho_0 g - \frac{BU}{\lambda b}\right) V = (\rho - \rho_0)\, gV + \frac{BU}{\lambda b} V.$$

Окончательный вид зависимости:

$$T(U) = \begin{cases} \rho g V & \text{при} \quad U \leqslant \rho_0 g \lambda b / B, \\ (\rho - \rho_0)\, gV + \dfrac{BV}{\lambda b} U & \text{при} \quad U > \rho_0 g \lambda b / B. \end{cases}$$

Примерный график этой зависимости приведён на рис. 26.

Задача 5. Солнечный парус

Рассмотрим процесс отражения фотона от зеркала паруса. Пусть скорость зеркала v, импульс фотона до столкновения равен p_1, а после столкновения p_2. Пусть изменение скорости зеркала в результате такого столкновения равно $\Delta v \ll v$. Запишем, законы сохранения импульса и энергии для системы зеркало-фотон:

$$p_1 + mv = -p_2 + m(v + \Delta v), \tag{1}$$

$$p_1 c + \frac{mv^2}{2} = p_2 c + \frac{m(v + \Delta v)^2}{2}. \tag{2}$$

Преобразуя уравнения и учитывая $\Delta v \ll v$, получим:

$$p_1 + p_2 = m\Delta v, \tag{3}$$

$$(p_1 - p_2)c = mv\Delta v, \tag{4}$$

откуда выразим изменение импульса зеркала в результате одного столкновения

$$\Delta p = m\Delta v = p_1 + p_2 = 2p_1 \frac{c}{c+v}.$$

Пусть за единицу времени происходит n столкновений с неподвижной площадкой, а энергия одного фотона, летящего в сторону зеркала, равна E_1. Тогда $WS = nE_1$. Величина энергии, излучаемой Солнцем является постоянной в пределах заданного телесного угла. Площадь сечения площадки, опирающейся на телесный угол с радиусом, много меньшим расстояния до Солнца, прямо пропорциональна квадрату расстояния до Солнца, значит $W \propto 1/R^2$, то есть $W = W_0 R_0^2/R^2$.

Поскольку парус движется со скоростью v, то число ударов в единицу времени уменьшается до величины $n_1 = n\Delta t(c - v)/c$. Импульс, переданный за время Δt, равен $n_1 \Delta t \Delta p$. Сила светового давления на зеркало:

$$F_W = \frac{\Delta p n_1 \Delta t}{\Delta t} = \frac{W_0 S}{E_1} \frac{R_0^2}{R^2} \frac{2cp_1}{c+v} \frac{c-v}{c} = \frac{2W_0 S}{c} \frac{c-v}{c+v} \frac{R_0^2}{R^2}$$

и направлена от Солнца.

Сила гравитационного притяжения

$$F_G = G\frac{Mm}{R^2} = \frac{4\pi^2 R_0^3}{T^2} \frac{m}{R^2},$$

где T — период обращения Земли вокруг Солнца. Для движения тела с постоянной скоростью сумма сил, действующих на него, должна быть равна нулю. Заметим, что F_G и F_W пропорциональны $1/R^2$, значит, движение с постоянной скоростью возможно при любом расстоянии до Солнца. Найдём скорость

v из равенства сил F_G и F_W:

$$\frac{4\pi^2 R_0^3}{T^2}\frac{m}{R^2} = \frac{2W_0 S}{c}\frac{c-v}{c+v}\frac{R_0^2}{R^2},$$

$$\text{откуда} \qquad v = \frac{W_0 S T^2 - 2\pi^2 R_0 mc}{W_0 S T^2 + 2\pi^2 R_0 mc} c = -1{,}19 \cdot 10^7 \text{ м/с},$$

то есть скорость зеркала направлена к Солнцу. Через один час полёта расстояние от тела до Солнца будет составлять $R_1 = R_0 - |v|t = 1{,}07 \cdot 10^{11}$ м $= 0{,}72$ а.е.