

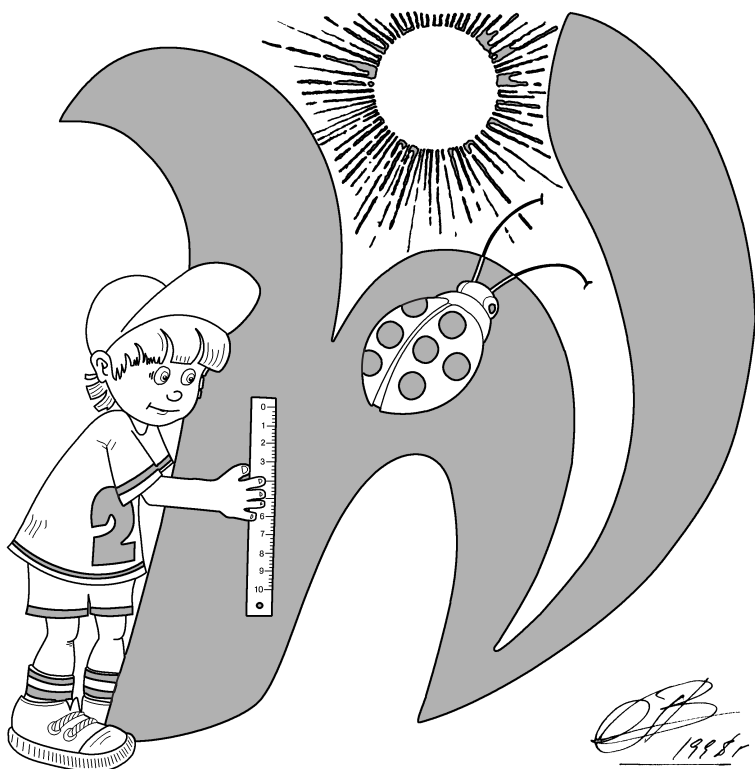
Федеральное агентство по образованию
Центральный оргкомитет Всероссийских олимпиад
Методическая комиссия по физике

XLI Всероссийская олимпиада школьников по физике

Окружной этап

Теоретический тур

Методическое пособие



Москва, 2006/2007 уч.г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике
Центрального оргкомитета Всероссийских олимпиад школьников
Телефоны: (495) 408-80-77, 408-86-95, (477) 361-80-43.
E-mail: physolymp@gmail.com, vip@mail.mipt.ru

Авторы задач

8 класс

1. Кармазин С.
2. Чудновский А.
3. Крюков А.
4. Слободянин В.

10 класс

1. Чудновский А.
2. Варгин А.
3. Воробьев И.
4. Чудновский А.
5. Чудновский А.

9 класс

1. Шведов О.
2. Дунин С.
3. Александров Д.
4. Шведов О.

11 класс

1. Чудновский А.
2. Чудновский А.
3. Варгин А.
4. Чивилев В.
5. Шведов О.

Оформление и верстка — Чудновский А.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система L^AT_EX 2_ε.
© Авторский коллектив
Подписано в печать 28 декабря 2007 г. в 15:33.

141700, Московская область, г. Долгопрудный
Московский физико-технический институт

8 класс

Задача 1. Кирпичный «колодец»

Экспериментатор Глюк склеил 4 кирпича (каждый массой $m = 3,24$ кг) водоустойчивым клеем. В результате у него получился кирпичный «колодец», который он приклеил ко дну стеклянного сосуда прямоугольной формы, площадь дна которого $S_0 = 540$ см². Затем Глюк начал наливать воду из шланга, опущенного в сосуд между его стенкой и кирпичным «колодцем» (рис. 1). Вода из шланга вытекала с постоянной скоростью. Глюк исследовал зависимость уровня воды в сосуде h от времени. График полученной зависимости представлен на рисунке 2, причём время $t = 0$ соответствует моменту начала поступления воды в сосуд. По результатам этого исследования Глюк определил длину C , ширину B и толщину A каждого кирпича, а также плотность материала, из которого они сделаны. Какие он получил значения перечисленных величин? Массой клея пренебречь.

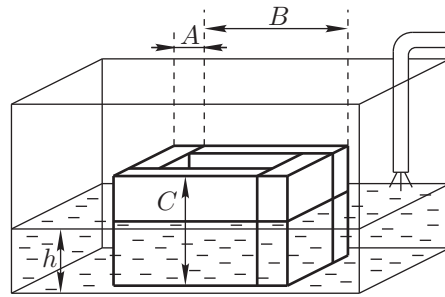


Рис. 1

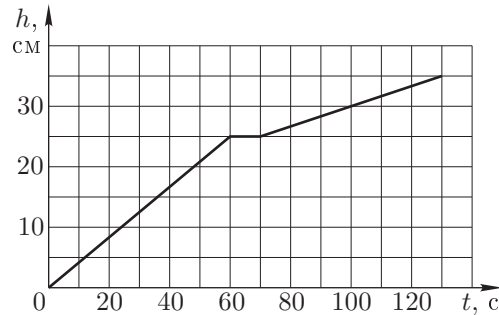


Рис. 2

Задача 2. Протягивание проволоки

Проволоку площадью поперечного сечения S протягивают через систему шкивов (рис. 3). Шкив, отмеченный изогнутой стрелкой, жёстко закреплён на валу электромотора, а остальные могут вращаться свободно. Найдите минимальную мощность N_{\min} мотора, необходимую для протягивания проволоки со скоростью v , если известно, что из-за внутреннего трения при изгибе на верхнем шкиве температура проволоки увеличивается на ΔT . Материал, из которого изготовлена проволока, имеет плотность ρ и удельную теплоёмкость c .

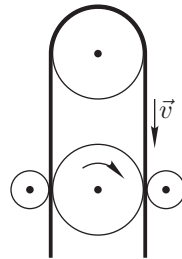


Рис. 3

Задача 3. Воздушный шар

Профессор Глюк, стоя на берегу моря, решил запустить воздушный шар объёмом $V = 30$ л. Масса оболочки шара $m = 0,02$ кг. Глюк наполнил шар гелием при нормальном давлении. Найдите высоту подъёма воздушного шара, если плотность гелия при нормальных условиях $\rho = 0,18$ г/л. Объём шара при подъёме не меняется. Зависимость плотности воздуха от высоты над уровнем моря представлена на рисунке 4.

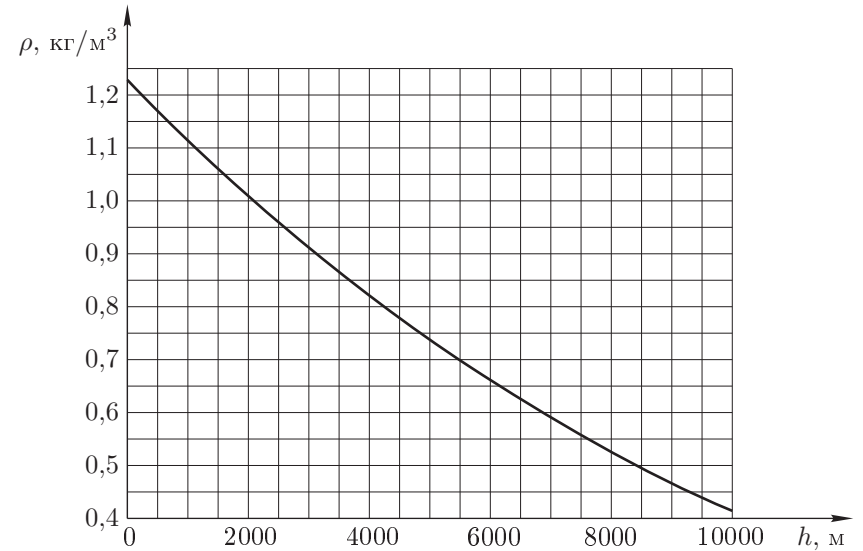


Рис. 4

Задача 4. «Лесенка»

Электрическая цепь состоит из нескольких сборок резисторов, соединённых последовательно по схеме (рис. 5). Сборка номер n состоит из n соединённых параллельно резисторов, сопротивление которых пробегают ряд значений от R до R/n , где $R = 6$ кОм, напряжение на батарейке $U = 12$ В. Вычислите силу тока I_n через амперметр для одного или нескольких значений n из диапазона от 1 до 10.

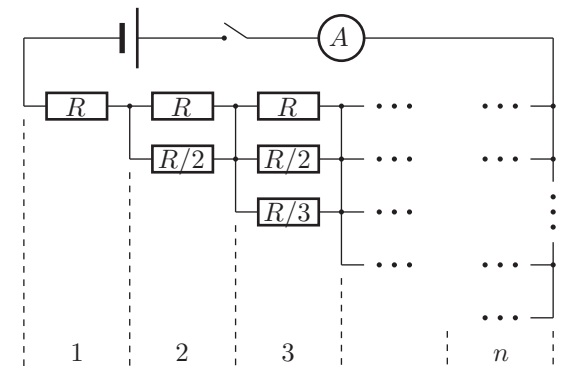


Рис. 5

Примечание. Число баллов за задачу равно максимальному n из указанного диапазона, для которого I_n подсчитано верно.

9 класс

Задача 1. Падение тела

Приведён график зависимости скорости падающего на Землю тела массой $m = 1$ кг от времени в единицах t_0 (рис. 6).

1. Определите промежуток времени t_0 .
2. Чему равна сила сопротивления воздуха $f(v)$, действующая на тело, движущееся со скоростью

- а) $v = 10$ м/с,
- б) $v = 8$ м/с?

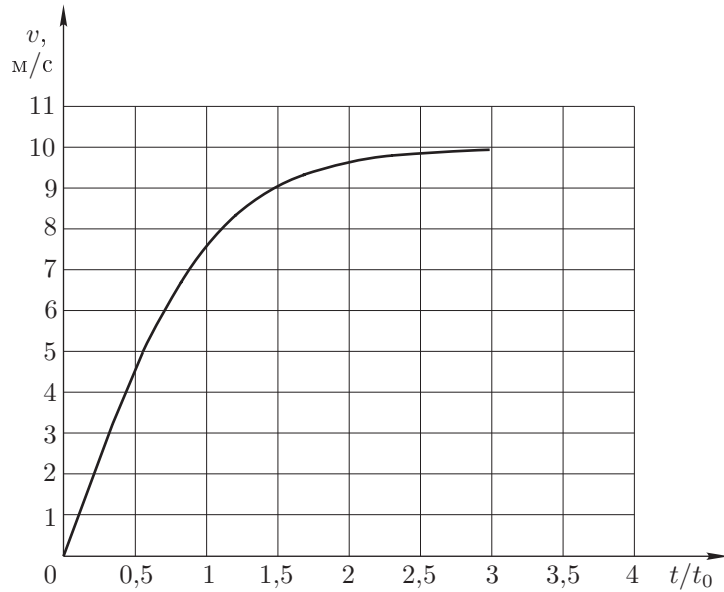


Рис. 6

Задача 2. Доски и шайбы

На гладкой поверхности расположены параллельно друг другу две длинные и узкие доски, а между ними — четыре шайбы радиуса R . Расстояние между досками $3L$, а начальное положение шайб показано на рисунке 7. Левая доска начинает двигаться вправо со скоростью v . Масса каждой доски m , масса каждой из шайб $m/2$. Материал, из которого сделаны доски и шайбы, таков, что все столкновения можно считать абсолютно неупругими. Тела при соударении не слипаются. Радиус шайб $R < L$ и достаточно мал для того, чтобы шайбы не задевали друг за друга. На каком расстоянии от правой доски будет находиться левая доска через достаточно большое время t после начала движения?

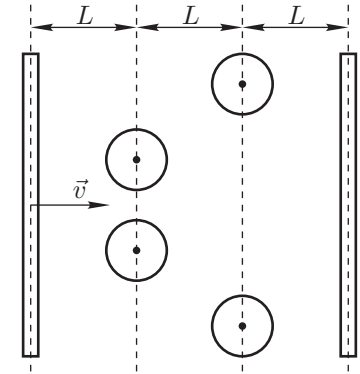


Рис. 7

Задача 3. Цилиндр в воде

Тонкая прямая проволока, представляющая собой цилиндр длины L сечением S , изготовлена из однородного материала с плотностью ρ . Удерживая за верхний конец, проволоку вертикально погружают на половину своей длины в жидкость с плотностью ρ_0 ($\rho > \rho_0$). Найдите силу натяжения проволоки на расстоянии h от её нижнего конца. Ускорение свободного падения равно g . Атмосферное давление P_0 .

Задача 4. Пара одинаковых линз

Две одинаковые собирающие тонкие линзы L_1 и L_2 с фокусным расстоянием F каждая расположены на расстоянии l друг от друга ($l > 2F$). Линзу L_3 с каким фокусным расстоянием F' следует поставить посередине между линзами L_1 и L_2 , чтобы любой луч, падающий на оптическую систему под малым углом к главной оптической оси, выходил бы из неё параллельно своему первоначальному направлению? Главные оптические оси всех трёх линз совпадают.

10 класс

Задача 1. Результирующая сила

Однородный нерастяжимый канат линейной плотностью ρ (кг/м) тянут через блок радиусом r (рис. 8). В некоторый момент разность длин свисающих кусков равна h , а левый конец каната движется вниз со скоростью v и ускорением a . Найдите горизонтальную F_x и вертикальную F_y проекции суммы всех сил, действующих на канат в этот момент времени. Свисающие концы каната движутся по вертикали.

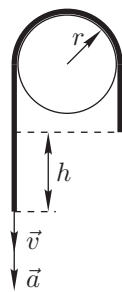


Рис. 8

Задача 2. Канал в бруске

Брусок массой M покоится на гладкой горизонтальной поверхности. В бруске просверлен тонкий канал, состоящий из трёх участков: горизонтального, вертикального и плавно их соединяющего изогнутого участка (рис. 9). В канал влетает с некоторой горизонтальной скоростью маленький шарик массой m . В процессе движения шарик поднимается до максимальной высоты H в вертикальном канале. Определите скорости v_1 шарика и v_2 бруска сразу после того, как шарик выскользнет из канала. Трение не учитывайте.

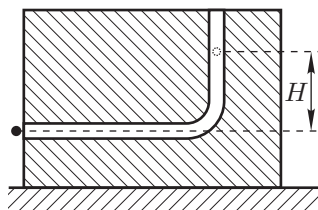


Рис. 9

Задача 3. Смещение поршня

К поршню, который делит герметичный горизонтальный цилиндр на два отсека равной длины, прикреплен шток, проходящий через отверстие в торце цилиндра (рис. 10). Начальное давление воздуха в отсеках одинаково и равно внешнему. Найдите, на какую долю x первоначальной длины отсека сместится поршень, если внешнее давление изменить в n раз. Проведите расчёт для $n_1 = 50$ и $n_2 = 1/50$. Отношение площади s штока к площади S поршня $\alpha = s/S = 0,02$. Температура воздуха в цилиндре поддерживается постоянной. Трение не учитывайте.



Рис. 10

Задача 4. Расширение гелия

Гелий в количестве ν молей находится в теплоизолированном вертикальном сосуде под поршнем, на котором стоит гиря, масса которой в α раз больше массы поршня (рис. 11). Над поршнем вакуум. Если к гелию медленно подвести теплоту Q , объём гелия увеличится на такую же величину, как если бы вместо подведения тепла гирю быстро сняли. Найдите изменение ΔT_2 температуры гелия во втором процессе. Гелий можно считать идеальным газом.

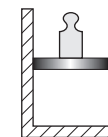


Рис. 11

Задача 5. Падение сквозь конденсатор

Плоский конденсатор подключён к источнику постоянного напряжения U . Пластины конденсатора расположены вертикально и имеют форму прямоугольников высотой H (рис. 12). Точно над центром конденсатора на высоте h над верхними краями пластин удерживают крупинку, имеющую массу m и несущую заряд q . Крупинку отпускают, и она начинает падать в поле тяжести g . При каком минимальном расстоянии d между пластинами крупинка сможет пролететь через конденсатор, не задев пластин? Краевые эффекты и сопротивление воздуха не учитывайте.

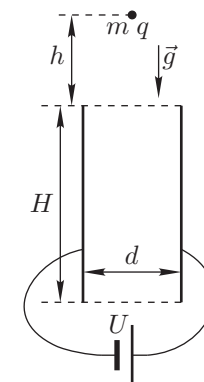


Рис. 12

11 класс

Задача 1. Соскальзывающий канат

Симметричная жёстко закреплённая труба состоит из трёх частей: двух прямых вертикальных участков AB и CD и соединяющего их участка BC , имеющего форму полуокружности (рис. 13). Через трубу пропущен однородный тяжёлый канат, который может двигаться внутри неё без трения. В начальный момент времени его концы находятся на одной высоте. Вследствие пренебрежимо малого внешнего воздействия канат начинает соскальзывать в одну из сторон. Найдите ускорение a концов каната и долю k длины каната, на которую опустится один из его концов, в тот момент, когда вертикальная составляющая силы, действующей на канат со стороны трубы, станет равна нулю. Длиной изогнутого участка трубы можно пренебречь по сравнению с длиной вертикальных кусков каната в любой момент времени.

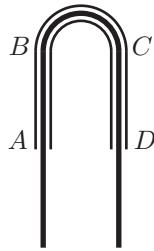


Рис. 13

Задача 2. «Убегание» жидкости

Одно колено высокой симметричной U -образной трубки, имеющей площадь поперечного сечения S , открыто в атмосферу, а второе — наглухо закрыто. Трубка заполнена жидкостью плотностью ρ , причём в открытом колене уровень жидкости до краёв, а в закрытом — на h ниже из-за оставшегося под крышкой воздуха (рис. 14). Трубку нагревают от начальной комнатной температуры T_1 до температуры T_2 кипения жидкости при атмосферном давлении P_0 . Найдите объём ΔV жидкости, вылившейся из открытого колена к моменту закипания, если известно, что уровень жидкости в закрытом колене остался выше горизонтального участка трубы. Испарением жидкости из открытого колена в процессе нагревания и давлением насыщенных паров жидкости при комнатной температуре можно пренебречь.

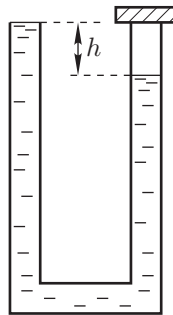


Рис. 14

Задача 3. Частица и переменный конденсатор

Одна из пластин плоского конденсатора закреплена, а другую можно передвигать. Расстояние между пластинами можно устанавливать любым в пределах от 0 до d . Имеется источник постоянного напряжения, который вне зависимости от расстояния между пластинами поддерживает на конденсаторе напряжение U . Требуется разогнать частицу с зарядом $q > 0$, первоначально покоившуюся между пластинами конденсатора, до максимально возможной кинетической энергии. При этом частица не должна приближаться к пластинам ближе, чем на расстояние a . Найдите эту энергию и укажите полярность подключения источника, начальное положение частицы и способ перемещения пластины, при которых этот максимум достигается. Силу тяжести и краевые эффекты не учитывайте.

Примечание. Первообразная функции $1/(x+k)$ есть $\ln(x+k)$.

Задача 4. Электромагнитная пушка

В длинном соленоиде радиусом r создано однородное магнитное поле с индукцией B_0 , направленной вдоль оси O цилиндра (рис. 15). На расстоянии R_0 от оси, перпендикулярно оси, укреплена прямолинейная трубка AM из диэлектрика. Угол AOM равен $\alpha = \pi/3$. Длина трубки значительно меньше длины соленоида. Внутри трубки в точке A находится небольшой шарик массой m с положительным зарядом q . Найдите скорость шарика в момент вылета из трубки в следующих случаях.

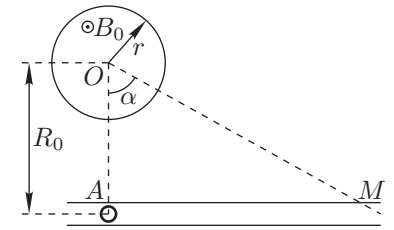


Рис. 15

1. Магнитное поле исчезает за малое время, в течение которого шарик смещается на расстояние, значительно меньшее R_0 .
 2. Индукция магнитного поля уменьшается с постоянной скоростью $dB/dt = -k < 0$ в течение всего времени движения шарика по трубке.
- Трением и электромагнитным действием трубки на шарик пренебречь.

Задача 5. Пара неодинаковых линз

Две тонкие линзы L_1 и L_2 с фокусными расстояниями F_1 и F_2 расположены на расстоянии L друг от друга. Тонкую линзу L_3 располагают между линзами L_1 и L_2 таким образом, что любой луч, падающий на оптическую систему под малым углом к главной оптической оси, выходит из неё параллельно своему первоначальному направлению. Найдите фокусное расстояние F_3 линзы L_3 и расстояния l_1 и l_2 от линзы L_3 до линз L_1 и L_2 . Главные оптические оси всех трёх линз совпадают.

Примечание. Фокусные расстояния собирающих линз принимаются положительными, рассеивающих — отрицательными.

Возможные решения

8 класс

Задача 1. Кирпичный «колодец»

Проанализируем график, представленный на рисунке 16. Его первый участок от нулевой до 60-й секунды соответствует заполнению водой пространства между стенками сосуда и кирпичами. Объем наливаемой воды определяется произведением высоты h на разность между площадью дна сосуда S_0 и площадью внешнего сечения кирпичного «колодца» $S_1 = (A + B)^2$.

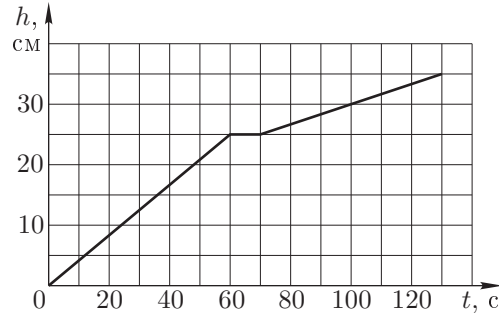


Рис. 16

В течение последующих 10 с уровень воды в сосуде не меняется, что обусловлено заполнением водой внутренней полости «колодца» через верхний край кирпичей. Площадь сечения внутренней полости $S_2 = (B - A)^2$. Начиная с 70-й секунды уровень воды превышает высоту кирпичной конструкции. Из графика следует, что длина кирпича $C = 25$ см. С этого момента заполнение сосуда происходит медленнее, чем на первом участке, так как площадь сечения заполняемого объема стала больше и равна теперь площади дна сосуда. Участок графика от 70-й до 130-й секунды позволяет определить расход поступающей в сосуд воды v в литрах в секунду. Поскольку за $\Delta t_3 = 60$ с в сосуд поступил объем $\Delta h S_0$, где $\Delta h = 10$ см, то

$$v = \Delta h S_0 / \Delta t_3 = 10 \text{ см} \times 540 \text{ см}^2 / 60 \text{ с} = 90 \text{ см}^3 / \text{с} = 0,09 \text{ л/с}.$$

Теперь на основе первой части графика (до 60-й секунды) можно определить внешнюю площадь сечения кирпичного «колодца». Поскольку за $\Delta t_1 = 60$ с уровень воды достиг значения $h_0 = 25$ см, то объем поступившей за это время воды с одной стороны равен произведению этой высоты на разность площадей S_0 и S_1 , а с другой стороны этот объем равен произведению расхода воды на время её поступления. Таким образом получаем уравнение $h_0((S_0 - (A + B)^2) = v \Delta t_1$ или

$$(A + B)^2 = S_0 - (v \Delta t_1) / h_0 = 540 - (90 \times 60) / 25 = 324 \text{ см}^2 \quad (1)$$

Заполнение внутренней полости «колодца» продолжалось $\Delta t_2 = 10$ с Следовательно $h_0(B - A)^2 = v \Delta t_2$ Или

$$(B - A)^2 = (v \Delta t_2) / h_0 = 36 \text{ см}^2 \quad (2)$$

Из (1) и (2) находим $B = 12$ см, $A = 6$ см. Таким образом объем одного кирпича равен $V = A \times B \times C = 6 \times 12 \times 25 = 1800 \text{ см}^3 = 0,0018 \text{ м}^3$ а плотность $\rho = M_k / V = 3,24 / 0,0018 = 1800 \text{ кг/м}^3$.

Критерии оценивания

Длина.....	2
Расход.....	2
Ширина.....	2
Толщина.....	2
Плотность.....	2

Задача 2. Протягивание проволоки

Мотор, протягивая проволоку, должен совершить, как минимум, работу, необходимую для нагревания проволоки. Поэтому минимальную мощность можно найти, если подсчитать необходимое для такого нагревания количество теплоты. За время t будет протянута проволока массой $m = \rho S l$, где $l = vt$ — длина протянутой проволоки. Для её нагрева на ΔT требуется теплота $Q = cm \Delta T$. Минимальная работа мотора $A_{\min} = Q$, а его мощность

$$N_{\min} = \frac{A_{\min}}{t} = \frac{Q}{t} = \frac{cm \Delta T}{t} = c \rho S v \Delta T.$$

Критерии оценивания

Выражение для m	3
Выражение для Q	2
Равенство минимальной работы и теплоты.....	2
Ответ.....	3

Задача 3. Воздушный шар

Шар достигнет высоты где подъёмная сила (сила Архимеда) уравняется с весом шара с гелием:

$$V \rho g = mg + V \rho_g.$$

Разделим правую и левую часть уравнения на V и сокращая g получим:

$$\rho = \frac{m}{V} + \rho_g = 0,847 \text{ г/л} \approx 0,85 \text{ г/л}.$$

Высоту подъёма шара определяется по графику зависимости плотности от высоты над уровнем моря. Таким образом шар достигнет высоты приблизительно $h = 3700$ м.

Критерии оценивания

Средняя плотность шара.....	3
Идея равенства плотности шара и плотности воздуха.....	3
Вычисление h	4

Задача 4. «Лесенка»

Если n одинаковых резисторов соединить параллельно, то их эквивалентное сопротивление будет равно $R_n = R/n$. Например, с учётом этого обстоятельства схему 3-ой сборки можно представить в виде (рис. 17), а её сопротивление

$$R_3 = \frac{R}{1+2+3} = R \left(\frac{1}{(3 \cdot 4)/2} \right) = R \left(\frac{1}{6} \right) = 1,0 \text{ кОм.}$$

Аналогично, для n -ой сборки

$$R_n = R \left(\frac{2}{n(n+1)} \right) = 2R \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Эквивалентную схему цепи из 3-х сборок можно представить в виде (рис. 18). Её сопротивление

$$R_{\text{э}(3)} = R \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) = \frac{3}{2}R = 9 \text{ кОм.}$$

Из закона Ома следует, что сила тока, протекающего через амперметр,

$$I_3 = \frac{2U}{3R} = 1\frac{1}{3} \text{ мА.}$$

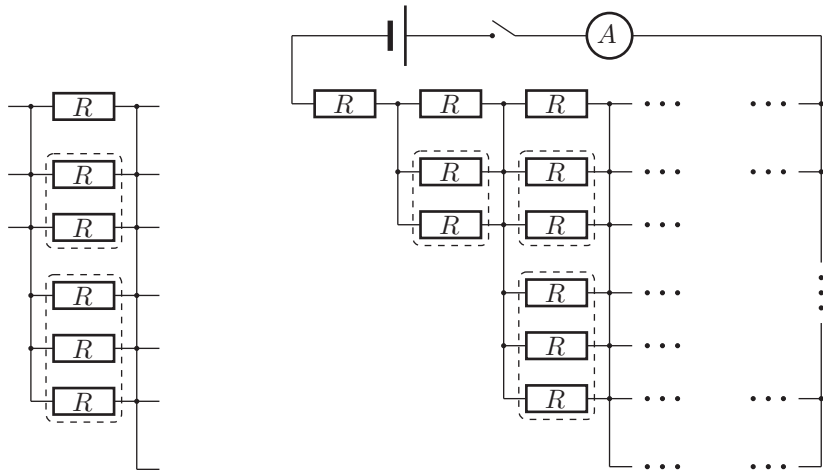


Рис. 17

Рис. 18

Примечание. Сопротивление схемы из N сборок равно

$$R_{\text{э}(N)} = 2R \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 2R \left(1 - \frac{1}{n+1} \right).$$

При $N \rightarrow \infty$, эквивалентное сопротивление $R_{\text{э}} \rightarrow 2R$. Следовательно, сила тока, протекающего через амперметр, будет стремиться к

$$I_{\infty} = \frac{U}{2R} = 1,0 \text{ мА.}$$

Критерии оценивания

Критерии оценивания указаны в условии.

9 класс

Задача 1. Падение тела

Изобразим данный в условии график схематически (рис. 19). Поскольку при достаточно малых скоростях сопротивлением воздуха можно пренебречь, то $a = g = 10 \text{ м/с}^2$. При малых t скорость тела прямо пропорциональна времени: $v = at$, где $at_0 = 10 \text{ м/с}$, отсюда $t_0 = 1 \text{ с}$.

2. При $v = 10 \text{ м/с}$ сила тяжести, действующая на тело, уравновешивается силой сопротивления воздуха; обе силы по модулю равны $f = 10 \text{ Н}$.

3. Скорость $v = 8 \text{ м/с}$ достигается в момент времени $\tau = 1,1 \text{ с}$. Вблизи этого момента времени график зависимости $v(t)$ можно приближенно считать прямой линией с угловым коэффициентом $a = 3,6 \text{ м/с}^2$; следовательно, равнодействующая сила, действующая на тело, равна $3,6 \text{ Н}$, и $f = 10 \text{ Н} - 3,6 \text{ Н} = 6,4 \text{ Н}$.

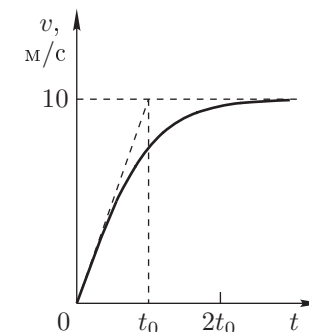


Рис. 19

Критерии оценивания

Определение t_0	3
Сила сопротивления при 10 м/с	3
Сила сопротивления при 8 м/с	4

Задача 2. Доски и шайбы

Левая доска, двигаясь вправо, в некоторый момент времени столкнётся одновременно с двумя левыми шайбами. Поскольку масса доски равна суммарной массе двух шайб, а соударение абсолютно неупругое, после соударения левая доска и столкнувшиеся с ней шайбы, по закону сохранения импульса, приобретут скорость $v/2$. После столкновения левой доски со второй парой шайб, её скорость уменьшится до $v/4$, и она будет двигаться с этой скоростью вместе со второй парой шайб. Первая же пара шайб продолжит двигаться со скоростью $v/2$ до столкновения с правой доской. После этого соударения правая доска также приобретет скорость $v/4$. Больше расстояние между досками меняться не будет.

До момента второго столкновения левая доска проходит путь $S_1 = 2L - R$. После этого первой паре шайб до столкновения с правой доской необходимо пройти путь $L - R$. Время, необходимое для этого

$$t_2 = \frac{L - R}{v/2}.$$

За это время левая доска успеет приблизиться к правой ещё на расстояние $S_2 = (v/4)t_2$. Поскольку начальное расстояние между досками равно $3L$, конечное расстояние между ними

$$S = 3L - (S_1 + S_2) = \frac{L + 3R}{2}.$$

Критерии оценивания

Движение доски и шайб после первого соударения	2
Движение доски и шайб после второго соударения	3
Движение досок и шайб после третьего соударения	2
Формула для расстояния между досками после всех соударений	2
Численный ответ	1

Задача 3. Цилиндр в воде

Разделим мысленно проволоку в нужной нам точке на две части. На нижнюю часть действуют сила натяжения, сила тяжести ρShg и сила давления жидкости на нижний торец проволоки $(\rho_0 g L/2 + P_0)S$. Из условия равновесия получаем

$$T = \rho Shg - \left(\rho_0 \frac{L}{2} g + P_0\right) S = Sg \left(\rho h - \rho_0 \frac{L}{2}\right) - P_0 S.$$

Ответ справедлив при любых значениях h в интервале $0 \leq h \leq L$ независимо от того, оказывается выбранная точка над или под поверхностью жидкости. Отрицательное значение силы натяжения означает, что проволока будет сжата.

Критерии оценивания

Формула для силы тяжести	1
Формула для силы давления жидкости без учета атмосферы	1
Учет атмосферного давления	2
Запись условия равновесия	2
Получение ответа	3
Интерпретация знака T	1

Задача 4. Пара одинаковых линз

По условию задачи, падающий параллельный пучок лучей преобразуется оптической системой в параллельный с тем же наклоном. Собирающая линза сводит параллельный пучок лучей в точку в фокальной плоскости. Следовательно, линза \mathcal{L}_3 должна переводить источник A в фокальной плоскости линзы \mathcal{L}_1 в изображение B в фокальной плоскости линзы \mathcal{L}_2 (рис. 20), при этом расстояния от линзы \mathcal{L}_3 как до источника A , так и до изображения B равны $l_3 = l/2 - F$. Расстояния от точек A и B до главной оптической оси также совпадают. Рассмотрим луч, испускаемый из точки A параллельно главной оптической оси; он преломляется на линзе в точке A' , далее пересекает главную оптическую ось в фокусе F' и затем проходит через точку B . Опустим из точки B перпендикуляр BB' на главную оптическую ось; обозначим через O центр линзы. Из равенства прямоугольных треугольников $A'OF'$ и $BB'F'$ получаем: $|OF'| = |B'F'| = l_3/2$ (рис. 21). Следовательно, линза \mathcal{L}_3 является собирающей с фокусным расстоянием

$$F' = \frac{l_3}{2} = \frac{l}{4} - \frac{F}{2}.$$

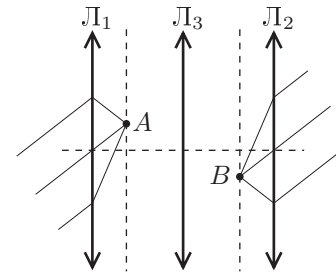


Рис. 20

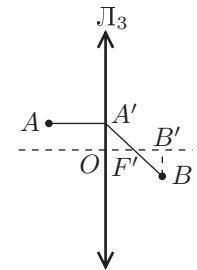


Рис. 21

Критерии оценивания

Построение изображений A и B	3
Расчёт расстояний от изображений до линзы \mathcal{L}_3	3
Расчёт фокусного расстояния линзы \mathcal{L}_3	4

10 класс

Задача 1. Результирующая сила

Результирующая сила \vec{F} (векторная сумма всех сил, действующих на тело) определяет в соответствии со вторым законом Ньютона ускорение \vec{a}_C центра масс тела:

$$\vec{F} = m\vec{a}_C, \quad \text{откуда} \quad F_x = ma_{Cx}, \quad F_y = ma_{Cy},$$

где a_{Cx} , a_{Cy} — проекции ускорения центра масс, $m = \rho l$ — масса каната, l — его длина. Введём систему координат Oxy как показано на рисунке 22. Пусть l_1 и l_2 — длины свисающих кусков каната в зависимости от времени, тогда вблизи рассматриваемого момента времени ($t = 0$)

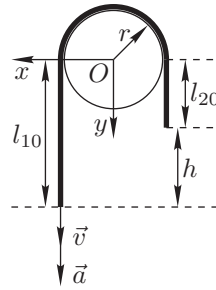


Рис. 22

$$l_1(t) = l_{10} + vt + \frac{at^2}{2}, \quad l_2(t) = l_{20} - vt - \frac{at^2}{2}, \quad (3)$$

причём $l_1(0) - l_2(0) = l_{10} - l_{20} = h$. Координаты центра масс каната:

$$x_C = \frac{\rho l_1 \cdot r - \rho l_2 \cdot r}{\rho l} = \frac{(l_1 - l_2)r}{l}, \quad (4)$$

$$y_C = \frac{\rho l_1 \cdot (l_1/2) + \rho l_2 \cdot (l_2/2) + \rho \pi r \cdot y_0}{\rho l} = \frac{l_1^2 + l_2^2}{2l} + \frac{\pi r y_0}{l}, \quad (5)$$

где y_0 — координата центра масс куска каната, лежащего на блоке. Подставив (3) в (4), получим

$$x_C(t) = \frac{rh}{l} + \frac{2rv}{l}t + \frac{1}{2} \cdot \frac{2ra}{l}t^2,$$

откуда видно, что по оси x ускорение центра масс $a_{Cx} = 2ra/l$. После аналогичной подстановки (3) в (5), раскрытия скобок и приведения подобных членов зависимость $y_C(t)$ примет вид многочлена четвёртой степени:

$$y_C(t) = B_0 + B_1t + B_2t^2 + B_3t^3 + B_4t^4.$$

Как и в случае равноускоренного движения, B_0 — это начальная координата, B_1 — начальная скорость, $2B_2$ — начальное ускорение, которое в данном случае (в предположении $a(t) = \text{const}$) не будет постоянным из-за наличия старших членов по t (аналогично тому, как координата перестаёт быть постоянной при наличии скорости, а скорость перестаёт быть постоянной при наличии ускорения). Однако нам требуется найти именно начальное ускорение в этом движении, которое однозначно определяется коэффициентом

$$B_2 = \frac{ha + 2v^2}{2l}, \quad \text{откуда} \quad a_{Cy}(0) = 2B_2 = \frac{ha + 2v^2}{l}.$$

Следовательно,

$$F_x = \rho l \cdot a_{Cx} = 2\rho ra, \quad F_y = \rho l \cdot a_{Cy} = \rho ha + 2\rho v^2.$$

Критерии оценивания

Связь результирующей силы с ускорением центра масс	1
Нахождение координат центра масс	3
Нахождение проекций ускорения центра масс	4
Окончательные выражения для проекций результирующей силы	2

Задача 2. Канал в бруске

Пусть v_0 — начальная скорость шарика, v — скорость шарика и бруска в момент достижения шариком наивысшей точки, тогда законы сохранения импульса и энергии имеют вид:

$$mv_0 = (M + m)v, \quad \frac{mv_0^2}{2} = \frac{(M + m)v^2}{2} + mgH,$$

откуда

$$v_0 = \sqrt{2gH \left(1 + \frac{m}{M}\right)}.$$

Поскольку потерь энергии в системе нет, то импульс и энергию системы сразу после вылета шарика из канала можно приравнять их начальным значениям. Полагая скорость шарика после вылета направленной влево, а скорость бруска — вправо, запишем законы сохранения импульса и энергии:

$$mv_0 = -mv_1 + Mv_2, \quad \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2},$$

откуда

$$v_1 = \frac{M - m}{M + m}v_0, \quad v_2 = \frac{2m}{M + m}v_0, \quad \text{где} \quad v_0 = \sqrt{2gH \left(1 + \frac{m}{M}\right)}.$$

Критерии оценивания

Законы сохранения импульса и энергии до остановки шарика	2
Выражение для v_0	2
Законы сохранения импульса и энергии за всё время движения	2
Ответ для v_1	2
Ответ для v_2	2

Задача 3. Смещение поршня

Пусть P_0 — исходное внешнее давление, L — первоначальная длина отсека, ΔL — смещение поршня вправо, тогда $x = \Delta L/L$, а условие равновесия поршня после изменения внешнего давления имеет вид:

$$nP_0 \cdot s + \frac{LP_0}{L + \Delta L} \cdot (S - s) = \frac{LP_0}{L - \Delta L} \cdot S, \quad (6)$$

где при расчёте давлений в отсеках использовано условие постоянства температуры воздуха. Сократив (6) на $P_0 S$, а дроби в нём на L , получим

$$n\alpha + \frac{1}{1+x}(1-\alpha) = \frac{1}{1-x},$$

или после приведения к стандартному виду:

$$\alpha n x^2 + (2 - \alpha)x + \alpha(1 - n) = 0.$$

Решение квадратного уравнения

$$x = \frac{\alpha - 2 \pm \sqrt{(2 - \alpha)^2 + 4\alpha^2 n(n - 1)}}{2\alpha n}.$$

Поскольку $-1 < x < 1$, то знак «-» следует отбросить. Подставив $n_1 = 50$ и $n_2 = 0,02$, найдём

$$x_1 = 0,41, \quad x_2 = -0,0099 \approx -0,01.$$

Во втором случае поршень сместится влево, так как $x_2 < 0$.

Критерии оценивания

Использование постоянства температуры для расчёта давлений.	2
Условие равновесия поршня.	2
Численный ответ в первом случае.	3
Численный ответ во втором случае.	3

Задача 4. Расширение гелия

Пусть m — масса поршня, S — площадь его поперечного сечения, тогда давления гелия при наличии гири и без неё:

$$P_1 = \frac{m(1 + \alpha)g}{S}, \quad P_2 = \frac{mg}{S}, \quad \text{откуда} \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{\alpha + 1}.$$

Гелий является одноатомным газом, поэтому его молярные теплоёмкости при постоянном объёме или давлении: $C_V = 3R/2$, $C_P = 5R/2$. Пусть ΔV — изменение объёма при расширении, ΔT_1 — изменение температуры в первом

процессе, тогда, используя уравнение Менделеева–Клапейрона для первого процесса в виде $P_1 \Delta V = \nu R \Delta T_1$ и

$$Q = \nu C_P \Delta T_1 = \frac{C_P}{R} P_1 \Delta V, \quad \text{найдем} \quad \Delta V = \frac{R}{C_P} \cdot \frac{Q}{P_1}.$$

Пусть Δh — смещение поршня к моменту установления равновесия во втором процессе, тогда закон сохранения энергии после снятия гири имеет вид:

$$\nu C_V \Delta T_2 + mg \Delta h = 0,$$

откуда

$$\Delta T_2 = -\frac{mg \Delta h}{\nu C_V} = -\frac{P_2 \Delta V}{\nu C_V} = -\frac{P_2 R Q}{P_1 \nu C_P C_V} = -\frac{4Q}{15(\alpha + 1)\nu R}.$$

Критерии оценивания

Отношение внешних давлений.	2
Выражение ΔV через Q	3
Закон сохранения энергии во втором опыте.	2
Ответ.	3

Задача 5. Падение сквозь конденсатор

При минимальном расстоянии между пластинами крупинка пролетит вблизи нижнего края одной из пластин. Рассмотрим граничный случай, когда частица попадает в нижний край пластины. Вертикальные составляющие скоростей крупинки на уровне верхних и нижних краёв пластин равны соответственно:

$$v_1 = \sqrt{2gh} \quad \text{и} \quad v_2 = \sqrt{2g(H + h)},$$

откуда время падения крупинки внутри конденсатора

$$t = \frac{v_2 - v_1}{g} = \left(\sqrt{H + h} - \sqrt{h} \right) \sqrt{\frac{2}{g}}.$$

За это время частица пролетит по горизонтали под действием электрической силы расстояние $d/2$, двигаясь с ускорением

$$a = \frac{F}{m} = \frac{|qE|}{m} = \frac{|q|U}{md}.$$

Из условия $d/2 = at^2/2$ находим

$$d = \sqrt{\frac{2|q|U}{mg} \left(H + 2h - 2\sqrt{h(H + h)} \right)}.$$

Критерии оценивания

Время падения крупинки внутри конденсатора.	3
Горизонтальное ускорение крупинки в конденсаторе.	3
Условие смещение по горизонтали на $d/2$	2
Ответ.	2

11 класс

Задача 1. Соскальзывающий канат

Пусть ρ — линейная плотность каната (кг/м), l — длина каната, l_1 и l_2 — длины его вертикальных кусков в некоторый момент времени, T_1 и T_2 — силы натяжения каната точках B и C трубы, F — вертикальная составляющая силы, действующей на канат со стороны трубы (рис. 23). Запишем второй закон Ньютона для вертикальных кусков каната:

$$\rho l_1 a = \rho l_1 g - T_1, \quad \rho l_2 a = T_2 - \rho l_2 g. \quad (7)$$

По условию можно пренебречь длиной куска каната, находящегося внутри участка BC трубы, по сравнению с длиной вертикальных кусков, то есть считать $l_1 + l_2 = l$. Кроме того, различие между T_1 и T_2 связано с касательным ускорением a этого короткого (значит, лёгкого) куска, поэтому примем $T_1 = T_2 = T$. Решая систему (7), получаем

$$a = g \frac{l_1 - l_2}{l_1 + l_2} = 2kg, \quad T = 2\rho g \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2} = \frac{1}{2} \rho l g (1 - 4k^2),$$

где использовано

$$l_1 - l_2 = 2kl, \quad l_1 = \left(\frac{1}{2} + k\right)l, \quad l_2 = \left(\frac{1}{2} - k\right)l.$$

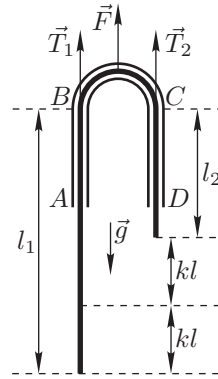


Рис. 23

Кусок каната, находящийся внутри участка BC трубы, движется по окружности под действием сил натяжения и реакции трубы. Результирующей силой, вызывающей движение по окружности, пренебрегать нельзя, так как при заданной в данный момент скорости v каната центростремительное ускорение возрастает с уменьшением диаметра полуокружности BC .

Вместо трудоёмкого суммирования сил в каждой точке участка BC применим метод малых перемещений: за малое время Δt кусок каната, находящийся внутри участка BC трубы, сместится на $\Delta l = v\Delta t$, что эквивалентно переносу кусочка каната длиной Δl из точки C в точку B с изменением знака его скорости. Изменение импульса вызвано импульсом результирующей силы:

$$\Delta p = 2(\rho \Delta l)v = (2T - F)\Delta t, \quad \text{откуда} \quad F = 2T - 2\rho v^2. \quad (8)$$

Скорость v найдём из закона сохранения энергии:

$$\frac{\rho l v^2}{2} = E_{\text{кин}} = -\Delta E_{\text{пот}} = (\rho k l)g(kl), \quad \text{откуда} \quad 2\rho v^2 = 4\rho l g k^2.$$

Подставляя полученное выражение в (8), найдём $F = \rho l g (1 - 8k^2)$. В искомый момент $F = 0$, откуда $k = 1/(2\sqrt{2})$, $a = g/\sqrt{2}$.

Критерии оценивания

Запись уравнений движения для вертикальных кусков каната 1
 Получение $a = 2kg$ 1
 Получение связи между T и k 1
 Нахождение $F = 2T - 2\rho v^2$ 3
 Выражение v из закона сохранения энергии 2
 Ответ для k 1
 Ответ для a 1

Задача 2. «Убегание» жидкости

Пусть H — разность уровней жидкости в коленах в момент закипания (рис. 24), тогда давления газа в закрытом колене в начальном и конечном состояниях имеют соответственно вид:

$$P_1 = P_0 + \rho gh, \quad P_2 = P_0 + \rho gH. \quad (9)$$

С другой стороны, давление газа в закрытом колене равно сумме парциальных давлений P_v воздуха и P_n насыщенных паров жидкости:

$$P_1 = P_{v1} + P_{n1} \approx P_{v1}, \quad P_2 = P_{v2} + P_{n2} = P_{v2} + P_0. \quad (10)$$

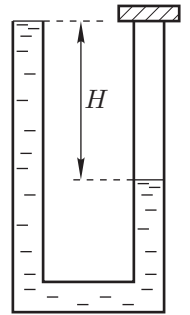


Рис. 24

Каждое из парциальных давлений растёт с ростом температуры, что и приводит к выталкиванию жидкости из открытого колена. Из уравнения Менделеева–Клапейрона для воздуха в закрытом колене

$$\frac{P_{v1} \cdot Sh}{T_1} = \frac{P_{v2} \cdot SH}{T_2} \quad \text{находим} \quad P_{v2} = \frac{hT_2}{HT_1} P_{v1} \approx \frac{hT_2}{HT_1} (P_0 + \rho gh). \quad (11)$$

Приравняв P_2 из (9) и (10) и подставляя P_{v2} из (11), получим

$$P_0 + \rho gH = \frac{hT_2}{HT_1} (P_0 + \rho gh) + P_0, \quad \text{откуда} \quad H = h \sqrt{\frac{T_2}{T_1} \left(\frac{P_0}{\rho gh} + 1\right)}.$$

Объём вытесненной жидкости

$$\Delta V = S(H - h) = Sh \left(\sqrt{\frac{T_2}{T_1} \left(\frac{P_0}{\rho gh} + 1\right)} - 1 \right).$$

Критерии оценивания

Связь давлений P_1 и P_2 газа с разностью уровней жидкости в коленах 2
 Представление давлений P_1 и P_2 в виде суммы парциальных 3
 Уравнение Менделеева–Клапейрона для воздуха 2
 Формула $\Delta V = S(H - h)$ 1
 Окончательный ответ 2

Задача 3. Частица и переменный конденсатор

Энергия частицы будет максимальна, если она сместится на максимально возможное расстояние под действием максимально возможной силы. Смещение ограничивается допустимыми расстояниями между пластинами и между пластиной и частицей. Электрическая сила, действующая на частицу, обратно пропорциональна расстоянию между пластинами, поэтому в каждый момент времени пластины должны быть максимально близко друг к другу.

Подключим конденсатор к источнику так, чтобы знаки зарядов частицы и закреплённой пластины совпадали. Сдвинем пластины до расстояния $2a$. Поместим частицу точно посередине между пластинами. Как только частица начнёт двигаться, будем отодвигать пластину, чтобы расстояние от неё до частицы оставалось равным a . При $d < 2a$ ускорить частицу в конденсаторе невозможно.

Направим ось x по направлению движения частицы и выберем начало отсчёта в месте начального положения частицы. Уравнение движения частицы имеет вид:

$$m \frac{dv}{dt} = |qE|, \quad (12)$$

где m и v — масса и скорость частицы, $|E| = U/(2a + x)$ — напряжённость электрического поля в конденсаторе. Подставим $|E|$ и домножим (12) на dx :

$$m \frac{dv}{dt} dx = |q| \frac{U}{2a + x} dx,$$

откуда, используя соотношение $v = dx/dt$, получим

$$mv dv = |q| U \frac{dx}{2a + x}.$$

Интегрируя полученное выражение в пределах от начального до конечного состояний, находим

$$K_{\max} = \frac{mv_{\text{кон}}^2}{2} = |q| U \ln(2a + x) \Big|_0^{d-2a} = |q| U \ln \frac{d}{2a}.$$

Критерии оценивания

Полярность указана.....	1
Начальное положение частицы.....	1
Оптимальный способ перемещения.....	2
Уравнение движения.....	1
Выражение для электрической силы.....	2
Ответ.....	3

Задача 4. Электромагнитная пушка

1. Разобьём время выключения поля на сколь угодно малые интервалы времени. Пусть магнитный поток через поперечное сечение соленоида за один из таких интервалов длительностью Δt изменился на $\Delta\Phi$. Тогда напряжённость вихревого электростатического поля в точке A направлена вдоль трубки и равна

$$E = \frac{-\Delta\Phi}{2\pi R_0 \Delta t}.$$

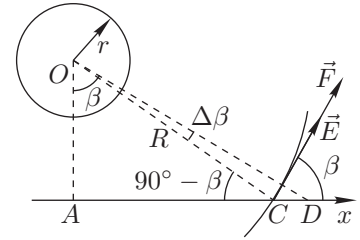


Рис. 25

Сила, действующая на шарик, $F = qE$. Поскольку $F\Delta t = m\Delta v$, где Δv — изменение скорости, то

$$-\frac{q}{2\pi R_0} \Delta\Phi = m\Delta v.$$

Суммирование данных уравнений за всё время включения поля даёт:

$$-\frac{q}{2\pi R_0} \sum \Delta\Phi = m \sum \Delta v.$$

У нас

$$\sum \Delta\Phi = 0 - B_0 \pi r^2 = -B_0 \pi r^2, \quad \sum \Delta v = v_1.$$

Шарик вылетает из трубки со скоростью, равной скорости v_1 , полученной в точке A :

$$v_1 = \frac{r^2 q B_0}{2m R_0}.$$

2. Направим ось Ox вдоль трубки (рис. 25). Пусть в произвольный момент времени при движении шарик находится в точке C на расстоянии R от оси соленоида, имеет скорость v и его положение x характеризуется углом β . Напряжённость вихревого электрического поля в точке C

$$E = \frac{\pi r^2 |dB/dt|}{2\pi R} = \frac{kr^2}{2R}.$$

На шарик действует сила $F = qE$, её проекция на ось Ox : $F_x = F \cos \beta$. За малое время Δt шарик переместится на расстояние $CD = v\Delta t$, получив приращение скорости Δv , причём $F_x \Delta t = m\Delta v$. Имеем, с учётом выражений для F_x , F и E :

$$\frac{kr^2 q \Delta t}{2R} \cos \beta = m\Delta v. \quad (13)$$

По теореме синусов для треугольника OCD :

$$v\Delta t \approx \frac{\Delta\beta}{\sin(90^\circ - \beta)}.$$

Отсюда $\Delta t \cos \beta / R = \Delta \beta / v$. С учётом последнего соотношения равенство (13) принимает вид

$$kr^2 q \Delta \beta = 2mv \Delta v.$$

Поскольку $2v \Delta v = \Delta(v^2)$, то $kr^2 q \Delta \beta = m \Delta(v^2)$. У нас

$$\sum \Delta \beta = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}, \quad \sum \Delta(v^2) = v_2^2 - 0 = v_2^2.$$

Шарик вылетит из трубки со скоростью

$$v_2 = \sqrt{\frac{\pi k r^2 q}{3m}}.$$

Критерии оценивания

Формула для E	1
Уравнение движения	1
Ответ для v_1	3
Выражение для E в произвольной точке трубы	1
Уравнение движения	1
Ответ для v_2	3

Задача 5. Пара неодинаковых линз

Тонкие линзы L_1 и L_2 переводят параллельные пучки лучей в пучки, проходящие через точки A и B соответственно (рис. 26). Следовательно, линза L_3 должна переводить пучок лучей, проходящий через точку A , в пучок лучей, проходящий через точку B . Поскольку луч AB не преломляется, он проходит через центр линзы O_3 ; отсюда однозначно восстанавливается плоскость линзы, перпендикулярная главной оптической оси системы. Фокусное расстояние линзы L_3 определяется по формуле тонкой линзы.

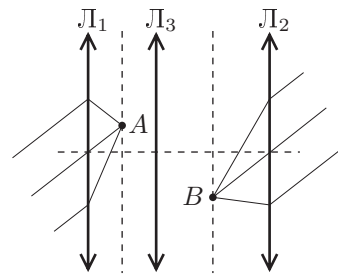


Рис. 26

Для получения количественного ответа введем систему координат: в качестве начала координат выберем центр линзы L_1 , направим ось Ox вдоль главной оптической оси, ось Oy — перпендикулярно оси Ox таким образом, чтобы лучи из параллельного пучка распространялись параллельно плоскости Oxy . Обозначим малый угол наклона параллельного пучка лучей к главной оптической оси через α .

Точки A и B имеют координаты $A(F_1, F_1 \alpha)$, $B(L - F_2, -F_2 \alpha)$. Центр O_3 линзы L_3 , имеющий координаты $O_3(l_1, 0)$, лежит на прямой AB ; отсюда

$$\frac{l_1 - F_1}{-F_1 \alpha} = \frac{L - l_1 - F_2}{-F_2 \alpha},$$

$$l_1 = \frac{LF_2^{-1}}{F_1^{-1} + F_2^{-1}} = \frac{LF_1}{F_1 + F_2}, \quad l_2 = \frac{LF_2}{F_1 + F_2}.$$

При этом должны выполняться соотношения $0 < l_1 < L$, $0 < l_2 < L$, поскольку линза L_3 по условию лежит между линзами L_1 и L_2 . Следовательно, задача может иметь решение, только если обе линзы (L_1 и L_2) собирающие либо рассеивающие; если одна из линз собирающая, другая рассеивающая, задача решения не имеет.

Для нахождения фокусного расстояния F_3 линзы L_3 запишем формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{l_1 - F_1} + \frac{1}{l_2 - F_2} = \frac{1}{F_3}.$$

Отсюда

$$F_3 = \frac{F_1 F_2 (L - F_1 - F_2)}{(F_1 + F_2)^2}.$$

При $L = F_1 + F_2$ задача решения не имеет.

Критерии оценивания

Координаты точек A и B	2
Ответ для l_1 и l_2	4
Ответ для F_3	4

Летняя физическая школа по-фрязински!

**12 дней в конце каждого июня
на острове на Волге под Дубной**

Немного физики и много игр (интеллектуальных и не очень), конкурсов, испытаний, соревнований (физических и физкультурных), солнца, неба и песен у костра. Подробнее о работе ЛФШ можно прочитать в 6 номере журнала «Потенциал» за 2006 год.

Организатор — заведующий кафедрой информатики, математики и физики гимназии города Фрязино, член жюри заключительного этапа Всероссийской олимпиады школьников по физике, к.ф.-м.н. Кармазин Сергей Владимирович, при участии преподавателей и аспирантов МФТИ.

*Приглашаем физиков-романтиков после 9 и 10 классов
из Подмосковья и других регионов России.*

www.sergkar.narod.ru

sergkar@fryazino.net